Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 2

---

1. Gleichung für die Charakteristiken: $\gamma'(s) = \gamma(s)$, also $\gamma(s) = \alpha e^s$.
   Charakteristik durch den Punkt (t, x): $\gamma(s) = xe^{s-t}$.
   Lösung des AWP: $u(t, x) = u(0, \gamma(0)) = u_0(xe^{-t})$.

2. Nach Definition einer (klassischen) Lösung, muss u_0 zumindest stetig differenzierbar sein.

   a) Setze u_0 1-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ zu $\tilde{u}_0$ fort. $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}_0(x - ct)$ ist die Lösung der Transportgleichung auf ganz $\mathbb{R}$ zum Anfangswert $\tilde{u}_0$. Setze für $0 \le x \le 1$

   $$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) = \tilde{u}_0(x - ct) = u_0(x - ct - \lfloor x - ct \rfloor).$$

   $u(t, x)$ ist dann die Lösung des Anfangs-Randwertproblems mit periodischen Randbedingungen, vorausgesetzt $\tilde{u}_0$ ist stetig differenzierbar, d.h. $u_0(0) = u_0(1)$ und $u_0'(0) = u_0'(1)$.

   b) Unter der Bedingung, dass $u_0(0) = u_0'(0) = 0$, ist die Lösung gegeben durch

   $$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - ct), & \text{falls } x - ct \ge 0, \\ 0, & \text{falls } x - ct < 0. \end{cases}$$

   c) Sei o.B.d.A $c > 0$. Aus $0 = u(t, 1) = u_0(1 - ct)$ folgt $u_0 \equiv 0$.

3. Die Lösungen sind gegeben durch

   $$u(t, x) = u_0(x + 2t) + \int_0^t s(x - 2(s - t))^2 \, ds = u_0(x + 2t) + \frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{3}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2,$$

   wobei u_0 eine stetig differenzierbare Funktion ist.

4. Angenommen $u(t, \bar{x})$ löst $u_t(t, \bar{x}) = -\bar{b} \cdot \nabla u(t, \bar{x})$. Man sucht die Kurven (Charakteristiken) $\{(s, \bar{\gamma}(s)) : s \in (a, b)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, entlang derer u konstant ist, also

   $$0 = \frac{\partial u(s, \bar{\gamma}(s))}{\partial s} = u_t(s, \bar{\gamma}(s)) + \bar{\gamma}'(s) \cdot \nabla u(s, \bar{\gamma}(s)),$$

   und erhält die Bedingung $\bar{\gamma}'(s) = \bar{b}$. Die Charakteristik durch den Punkt $(t, \bar{x})$ ist somit $\bar{\gamma}(s) = \bar{x} + (s - t)\bar{b}$ und die Lösung zum Anfangswert $u_0 = u(0, \bar{x})$ gegeben durch $u_0(\bar{x} - t\bar{b})$. Sei u eine Lösung der inhomogenen Gleichung $u_t(t, \bar{x}) = -\bar{b} \cdot \nabla u(t, \bar{x}) + f(t, \bar{x})$, dann ist

   $$\frac{\partial u(s, \bar{\gamma}(s))}{\partial s} = u_t(s, \bar{\gamma}(s)) + \bar{b} \cdot \nabla u(s, \bar{\gamma}(s)) = f(t, \bar{x})$$

   und $u(t, \bar{x}) = u_0(\bar{x} - t\bar{b}) + \displaystyle\int_0^t f(s, \bar{x} + (s - t)\bar{b}) \, ds$.