Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011
Gesamt: 12

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 3

Abgabetermin: Montag, 08.11.2010 in der Vorlesung

1. Wir definieren wie in der Vorlesung die Operatoren [4]

$$(C(t)f)(x) := \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) \quad \text{und} \quad (S(t)f)(x) := \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} f(y)\,dy.$$

Zeige $C(0)f \equiv f$ und $2C(t)(C(s)f) \equiv C(t+s)f + C(t-s)f$ sowie $S(t+s)f \equiv C(s)(S(t)f) + S(s)(C(t)f)$ für alle $s, t \geq 0$ und alle Funktionen $f \in C^1$. Warum wird S Sinus und C Cosinus genannt?

2. Sei $A, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige, dass die beiden *travelling waves* [4]

$$u(t,x) := A\sin(x - ct) \qquad \text{und} \qquad v(t,x) := A\sin(x + ct)$$

sowie auf Grund von Linearität auch deren Summe $u + v$ Lösungen der eindimesionalen Wellengleichung ($u_{tt} = c^2 u_{xx}$) sind, $u + v$ aber keine *travelling wave*, sondern eine *stehende Welle* ist, d.h. $u + v$ läßt sich mittels zweier Funktionen $\eta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $\xi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ in der Form $(u+v)(t,x) = \eta(t)\xi(x)$ schreiben.

3. Sei $u(t,x)$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. [4]
Führe die Variablentransformation $\lambda := x - ct$ und $\mu := x + ct$ durch und setze $v(\lambda,\mu) := u(t(\lambda,\mu), x(\lambda,\mu))$. Zeige, dass $v_{\lambda\mu} = 0$ äquivalent zu $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ist. Schließe daraus, dass die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung die Gestalt $F(x - ct) + G(x + ct)$ hat, wobei $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind. Leite dann aus dieser Darstellung der Lösung d'Alemberts Formel für das Anfangswertproblem

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx} \quad \text{mit} \quad u(0,x) = u_0(x) \text{ und } u_t(0,x) = u_1(x)$$

her.