Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 3

1.

$$
\begin{aligned}
C(0)f(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x)+f(x)\right) = f(x) \\
2C(t)(C(s)f)(x) &= 2C(t)(\frac{1}{2}(f(x+cs)+f(x-cs))) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x+cs+ct)+f(x+cs-ct)+f(x-cs+ct)+f(x-cs-ct)\right) \\
&= C(s+t)f(x) + C(t-s)f(x) \\
(C(s)(S(t)f)+S(s)(C(t)f))(x) &= \frac{1}{4}\int_{x-ct+cs}^{x+ct+cs} f(y)\,dy + \frac{1}{4}\int_{x-ct-cs}^{x+ct-cs} f(y)\,dy \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{x-cs}^{x+cs} f(z+ct)+f(z-ct)\,dz \\
&= S(t+s)f(x)
\end{aligned}
$$

Vergleiche mit $\cos(0)=1$, $\cos(s+t)+\cos(t-s) = 2\cos(t)\cos(s)$ und $\sin(s+t) = \cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t)$.

2.

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A\sin(x-ct)+A\sin(x-ct)) = Ac^2\sin(x-ct)+Ac^2 sin(x+ct) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A\sin(x-ct)+A\sin(x+ct))
$$

$$
A\sin(x-ct)+A\sin(x+ct) = 2A\sin(x)\cos(ct)
$$

Aber $2A\sin(x)\cos(ct)$ läßt sich nicht durch $\phi(x+bt)$ für ein $b\in\mathbb{R}$ und eine Funktion ϕ darstellen (setzt man z.B $t=\pi/2c$, so würde folgen $\phi\equiv 0$).

3.

$$
t(\lambda,\mu) = \frac{\mu-\lambda}{2},\ x(\lambda,\mu) = \frac{\mu+\lambda}{2}; \quad 0 = v_{\lambda\mu} = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \quad \Leftrightarrow \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}
$$

Aus $v_{\lambda\mu}=0$ folgt $v_\lambda(\lambda,\mu) = f(\lambda)$ und daraus $v(\lambda,\mu) = F(\lambda)+G(\mu)$, d.h. die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist $F(x-ct)+G(x+ct)$ mit $F,G\in C^2(\mathbb{R})$.
Aus den Anfangsbedingungen $F(x)+G(x) = u_0(x)$, bzw. $F'(x)+G'(x) = u_0'(x)$ und $c(G'(x)-F'(x)) = u_1(x)$ erhält man

$$
G'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) + \frac{1}{2c}u_1(x), \quad \text{bzw.} \quad G(x+ct)-G(0) = \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(y)\,dy + \frac{1}{2}u_0(x+ct) - \frac{1}{2}u_0(0)
$$

und

$$
F'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) - \frac{1}{2c}u_1(x), \quad \text{bzw.} \quad -F(x-ct)+F(0) = -\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} u_1(y)\,dy - \frac{1}{2}u_0(x-ct) + \frac{1}{2}u_0(0)
$$

und somit d'Alemberts Formel.