Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 4

Abgabetermin: Montag, 15.11.2010 in der Vorlesung

1. Sei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Löse das Anfangswertproblem [4]

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= x^2 u_{xx}(t,x) + x u_x(t,x), \qquad t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x), \\ u_t(0,x) &= u_1(x). \end{aligned}$$

Hinweis: Finde eine Zerlegung des Differentialoperators $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial x}\right)$, ähnlich derjenigen, die in der Vorlesung bei der Herleitung von d'Alemberts Formel für die Wellengleichung benutzt wurde.

2. Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung [4]

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad t \geq 0,\, x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,x) = u_0(x) \quad \text{und} \quad u_t(0,x) = u_1(x),$$

wobei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ and $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ kompakten Träger haben sollen, d.h. $u_0(x) = 0$ und $u_1(x) = 0$ für alle x mit $|x| \geq R$ für ein $R \in \mathbb{R}$.
Zeige, dass für t groß genug die kinetische Energie gleich der potentiellen Energie ist

$$\mathrm{E}_{kin}(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(u_t(t,x))^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(u_x(t,x))^2\, dx =: \mathrm{E}_{pot}(t).$$

Hinweis: Benutze d'Alemberts Formel.

3. Sei $u_0 \in C^2([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = u_0''(0) = u_0''(1) = 0$ (warum?) und $u_1 \in C^1([0,1])$ mit $u_1(0) = u_1(1) = 0$. Löse das Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung auf dem Interval $[0,1]$ [4]

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad t \geq 0,\, x \in [0,1], \qquad u(0,x) = u_0(x) \quad \text{und} \quad u_t(0,x) = u_1(x),$$

mit Dirichletrandbedingungen $u(t,0) = u(t,1) = 0$ für $t \geq 0$.

4. Sei $u_0 \in C^2([0,1])$ mit $u_0'(0) = u_0'(1) = 0$ und $u_1 \in C^1([0,1])$ mit $u_1'(0) = u_1'(1) = 0$. Löse das Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung auf dem Interval $[0,1]$ [4]

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad t \geq 0,\, x \in [0,1], \qquad u(0,x) = u_0(x) \quad \text{und} \quad u_t(0,x) = u_1(x),$$

mit Neumannrandbedingungen $u'(t,0) = u'(t,1) = 0$ für $t \geq 0$.
Kann die Lösung u negative Werte annehmen, wenn $u_0(x) \geq 0$ und $u_1(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$?