Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 4

---

1. Sei u eine Lösung des Anfangswertproblems, dann gilt
$$0=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\left(\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}\right)u.$$
Setze $v:=\left(\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}\right)u$. Es folgt $v(t,x)=v(0,xe^{-t})=:\phi(xe^{-t})$ für eine Funktion $\phi\in C^1(\mathbb{R})$ und $\left(\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\phi(xe^{-t})$. Die Charakterisik für letztere Gleichung ist $\gamma(s)=xe^{t-s}$ und damit
$$u(t,x)=u_0(xe^t)+\int_0^t\phi(xe^{t-s}e^{-s})\,ds.$$
Aus $u_1(x)=u_t(0,x)=xu_0'(x)+\phi(x)$ bzw. $\phi(x)=u_1(x)-xu_0'(x)$ folgt
$$u(t,x)=u_0(xe^t)+\int_0^t -xe^{t-2s}u_0'(xe^{t-2s})+u_1(xe^{t-2s})\,ds=\frac{1}{2}\left(u_0(xe^t)+u_0(xe^{-t}\right)+\frac{1}{2}\int_{xe^{-t}}^{xe^t}\frac{1}{y}u_1(y)\,dy$$
und man rechnet leicht nach, dass die so definierte Funktion tatsächlich eine Lösung ist.

2. Sei $t>R$. Es ist $u(t,x)=\frac{1}{2}(u_0(x-t)+u_0(x+t))+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(y)\,dy$ und
$$\begin{aligned}u_t(t,x)&=-\frac{1}{2}u_0'(x-t)+\frac{1}{2}u_0'(x+t)+\frac{1}{2}u_1(x+t)+\frac{1}{2}u_1(x-t),\\ u_x(t,x)&=\frac{1}{2}u_0'(x-t)+\frac{1}{2}u_0'(x+t)+\frac{1}{2}u_1(x+t)-\frac{1}{2}u_1(x-t),\end{aligned}$$
wobei
$$\begin{array}{lllll}u_0'(x-t)=0 & \text{und} & u_1(x-t)=0 & \text{für} & x-t<-R \quad\text{und}\quad x-t>R,\\ u_0'(x+t)=0 & \text{und} & u_1(x+t)=0 & \text{für} & x+t<-R \quad\text{und}\quad x+t>R,\end{array}$$
also
$$\begin{aligned}E_{kin}&=\frac{1}{2}\left(\int_{-R-t}^{R-t}(\frac{1}{2}u_0'(x+t)+\frac{1}{2}u_1(x+t))^2\,dx+\int_{-R+t}^{R+t}(-\frac{1}{2}u_0'(x-t)+\frac{1}{2}u_1(x-t))^2\,dx\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\int_{-R-t}^{R-t}(\frac{1}{2}u_0'(x+t)+\frac{1}{2}u_1(x+t))^2\,dx+\int_{-R+t}^{R+t}(\frac{1}{2}u_0'(x-t)-\frac{1}{2}u_1(x-t))^2\,dx\right)=E_{pot}.\end{aligned}$$

3. Definiere
$$\tilde{u}_{0/1}:=\begin{cases}u_{0/1}(x-\lfloor x\rfloor) & \text{falls } \lfloor x\rfloor=2k,\\ -u_{0/1}(1-(x-\lfloor x\rfloor)) & \text{falls } \lfloor x\rfloor=2k+1,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$
Dann ist $\tilde{u}_{0/1}(n)=0$ für alle $n\in\mathbb{Z}$ und $\tilde{u}_{0/1}(-x)=-\tilde{u}_{0/1}(x)$ sowie $\tilde{u}_{0/1}(1-x)=-\tilde{u}_{0/1}(1+x)$.
$$u(t,x):=\frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x-t)+\tilde{u}_0(x+t))+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde{u}_1(y)\,dy$$
löst also das Anfangswertproblem mit Dirichletrandbedingungen.
Da $\lim_{h\to+0}u_0''(n+h)=-\lim_{h\to+0}u''(n-h)$ muss $u_0''(0)=u_0''(1)=0$ gelten.

4. Definiere
$$\tilde{u}_{0/1} := \begin{cases} u_{0/1}(x - \lfloor x \rfloor) & \text{falls } \lfloor x \rfloor = 2k, \\ u_{0/1}(1 - (x - \lfloor x \rfloor)) & \text{falls } \lfloor x \rfloor = 2k+1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist $\tilde{u}_{0/1}(-x) = \tilde{u}_{0/1}(x)$ und $\tilde{u}_{0/1}(1-x) = \tilde{u}_{0/1}(1+x)$, woraus folgt $\tilde{u}_0'(-x) = -\tilde{u}_0(x)$ und $\tilde{u}_0'(1-x) = -\tilde{u}_0'(1+x)$.

$$u(t,x) := \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x-t) + \tilde{u}_0(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{u}_1(y)\, dy$$

löst also das Anfangswertproblem mit Neumannrandbedingungen.
Aus der Lösungsformel für u folgt unmittelbar, dass $u(t,x) \geq 0$, falls $\tilde{u}_0(x) \geq 0$ und $\tilde{u}_1(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, was äquivalent zu $u_0(x) \geq 0$ und $u_1(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ ist.