Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 5

---

1. Seien u und v Lösungen des gegebenen Anfangswertproblems, die die genannten Eigenschaften bzw. Randbedingungen besitzen, dann hat $w := u - v$ ebenfalls die gewünschten Eigenschaften bzw. Randbedingungen und
$$w_{tt}(t,x) = \Delta w(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \quad \text{und} \quad w(0,x) = 0, \quad w_t(0,x) = 0.$$
Die Energiefunktion von w läßt sich in diesem Fall auch bei nicht beschränktem Ω ableiten, und man erhält
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}|w_t(t,x)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w(t,x)|^2\,dx\right)\\
&= \int\limits_{\Omega\cap B_R} (w_t(t,x)w_{tt} + \nabla w(t,x)\cdot\nabla w_t(t,x))\,dx + \int\limits_{\Omega\cap B_R^C} (w_t(t,x)w_{tt} + \nabla w(t,x)\cdot\nabla w_t(t,x))\,dx\\
&= \int\limits_{\Omega\cap B_R} w_t(t,x)(w_{tt} - \Delta w(t,x))\,dx + \int\limits_{\partial(\Omega\cap B_R)} w_t(t,y)\frac{\partial w}{\partial n}(t,y)\,d\sigma(y)\\
&\quad + \int\limits_{\Omega\cap B_R^C} (w_t(t,x)w_{tt} + \nabla w(t,x)\cdot\nabla w_t(t,x))\,dx\\
&= \int\limits_{\partial(\Omega\cap B_R)} w_t(t,y)\frac{\partial w}{\partial n}(t,y)\,d\sigma(y) + \int\limits_{\Omega\cap B_R^C} (w_t(t,x)w_{tt}(t,x) + \nabla w(t,x)\cdot\nabla w_t(t,x))\,dx,
\end{aligned}$$
wobei B_R den Ball mir Radius R um den Nullpunkt und B_R^C dessen Komplement bedeutet. Der letzte Ausdruck geht mit $R \to \infty$ gegen 0, da $w_{x_i}(t,\cdot), w_{x_it}(t,\cdot), w_t(t,\cdot), w_{tt}(t,\cdot)$ quadrat integrierbar sind bzw. w_t und $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ auf $\partial\Omega$ verschwinden. D.h. die Energie von w ist wegen $E(0) = 0$ konstant Null und damit auch $w_t(t,x)$, weshalb w die Nullfunktion ist, woraus $u \equiv v$ folgt.

2. Induktionsanfang:
$$\frac{d^2}{d\,r^2}(r\phi(r)) = 2\phi'(r) + r\phi''(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)\left(r^2\frac{d}{d\,r}\phi(r)\right).$$
Induktionsschritt:
$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\,r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)^k (r^{2k+1}\phi(r)) &= \frac{d^2}{d\,r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)^{k-1}\left((2k+1)r^{2k-1}\phi(r) + r^{2k}\frac{d}{d\,r}\phi(r)\right)\\
&= \frac{d^2}{d\,r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\left((2k+1)\phi(r) + r\frac{d}{d\,r}\phi(r)\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{d}{d\,r}\left((2k+1)\phi(r) + r\frac{d}{d\,r}\phi(r)\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)^{k}\left((2k+2)r^{2k}\frac{d}{d\,r}\phi(r) + r^{2k+1}\frac{d^2}{d\,r^2}\phi(r)\right)\\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\right)^{k+1}\left(r^{2k+2}\frac{d}{d\,r}\phi(r)\right).
\end{aligned}$$

3. Anfangsbedingungen:
   Sei x fest. Schreibe $\phi_0(t) := \frac{1}{|\partial B_t|}\int_{\partial B_t(x)} u_0(z)\,d\sigma(z)$ und $\phi_1(t) := \frac{1}{|\partial B_t|}\int_{\partial B_t(x)} u_1(z)\,d\sigma(z)$. Dann gilt

$$\phi'_{0/1}(t) = \frac{t}{(2k+1)|B_t|}\int_{B_t(x)} \Delta u_{0/1}(y)\,dy \quad \text{und} \quad \frac{d^j}{dt^j}\phi_{0/1}(t) = \frac{t^{2-j}}{|B_t|}\int_{B_t(x)} f(y)\,dy$$

   mit $f \in C^{k+2-(j+1)}$, $j = 1,\dots,k+1$, für ϕ_0 und $f \in C^{k+1-(j+1)}$, $j = 1,\dots,k$, für ϕ_1.
   Lemma 4.6 aus dem Skript liefert

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{(2k-1)!!}\frac{d}{d\,t}\left((2k-1)!!t\phi_0(t) + \sum_{j=1}^{k-1}\beta_j^k t^{j+1}\frac{d^j}{dt^j}\phi_0(t)\right) \\
&\quad + \frac{1}{(2k-1)!!}\left((2k-1)!!t\phi_1(t) + \sum_{j=1}^{k-1}\beta_j^k t^{j+1}\frac{d^j}{dt^j}\phi_1(t)\right) \\
&= \phi_0(t) + t\phi_0'(t) + \frac{1}{(2k-1)!!}\sum_{j=1}^{k-1}\left((j+1)\beta_j^k t^j\frac{d^j}{dt^j}\phi_0(t) + \beta_j^k t^{j+1}\frac{d^{j+1}}{d\,t^{j+1}}\phi_0(t)\right) \\
&\quad + t\phi_1(t) + \frac{1}{(2k-1)!!}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j^k t^{j+1}\frac{d^j}{dt^j}\phi_1(t)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= 2\phi_0'(t) + t\phi_0''(t) + \phi_1(t) \\
&\quad + \frac{1}{(2k-1)!!}\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_1 t^{j+1}\frac{d^j}{dt^j}\phi_0(t) + c_2 t^j\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} + c_3 t^{j+1}\frac{d^{j+2}}{dt^{j+2}}\phi_0(t) + c_4 t^j\frac{d^j}{dt^j}\phi_1(t) + c_5 t^{j+1}\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\right).
\end{aligned}$$

   Es folgt $\lim_{t\to 0} u(t,x) = \lim_{t\to 0}\phi_0(t) = u_0(x)$ und $\lim_{t\to 0}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \lim_{t\to 0}\phi_1(t) = u_1(x)$.
   Dass $u(t,x)$ tatsächlich eine Lösung ist, wurde schon in der Vorlesung gezeigt.

4. Sei M das Maximum von $|u_0(x)|$, $|\Delta u_0(x)|$ und $|u_1(x)|$ über alle $x \in \mathbb{R}^3$ und sei $t \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|u(t,x)| &= |\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{|\partial B_t|}\int\limits_{\partial B_t(x)} u_0(z)\,d\sigma(z)\Big) + \frac{t}{|\partial B_t|}\int\limits_{\partial B_t(x)} u_1(z)\,d\sigma(z)| \\
&= |\frac{1}{|\partial B_t|}\int\limits_{\partial B_t(x)\cap B_R} u_0(z)\,d\sigma(z) + \frac{t}{|\partial B_t|}\int\limits_{B_t(x)\cap B_R}\Delta u_0(x)\,dx + \frac{t}{|\partial B_t|}\int\limits_{\partial B_t(x)\cap B_R} u_1(z)\,d\sigma(z)| \\
&\leq \frac{1}{|\partial B_1|t^2}\int\limits_{\partial B_t(x)\cap B_R} M\,d\sigma(z) + \frac{t}{|\partial B_1|t^2}\int\limits_{B_t(x)\cap B_R} M\,dx + \frac{t}{|\partial B_1|t^2}\int\limits_{\partial B_t(x)\cap B_R} M\,d\sigma(z)| \\
&\leq \frac{M}{|\partial B_1|t}(2|\partial B_R| + |B_R|) =: \frac{C_1}{t}
\end{aligned}$$

   Ferner sei $u(t,x) \leq C_2$ für $0 \leq t \leq 1$ und $\|x\| \leq R+1$. Mit $C := \max\{C_1, C_2\}$ folgt dann $u(t,x) \leq C/t$ für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$.