Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 6

Abgabetermin: Montag, 29.11.2010 in der Vorlesung

1. Betrachte die Wellengleichung $u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x)$ auf einem beschränkten Gebiet Ω mit C^1-Rand $\partial\Omega$ und der Randwertbedingung $\frac{\partial u}{\partial n}(t,z) = \pm \frac{\partial u}{\partial t}(t,z)$ für alle $t \geq 0$ und $z \in \partial\Omega$. Für welches Vorzeichen ist die wie in der Vorlesung definierte Energie $E(t)$ für jede Lösung $u \in C^{2,2}(\bar{\Omega}$ eine fallende bzw. wachsende Funktion in der Zeit? [4]

2. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. In der Physik betrachtet man auch die Wellengleichung mit "akustischen" Randbedingungen [4]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t,x) &= c^2 \Delta\phi(t,x), & t \geq 0,\ x \in \Omega, \\ m\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}(t,z) &= -d\frac{\partial \delta}{\partial t}(t,z) - k\delta(t,z) - \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,z), & t \geq 0,\ z \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t}(t,z) &= \frac{\partial \phi}{\partial n}(t,z), & t \geq 0,\ z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet ϕ das Gechwindigkeitspotential einer Flüssigkeit, die im Gebiet Ω eingeschlossen ist, und δ die Auslenkung des Randes in Normalenrichtung aus seiner Ruhelage; $m > 0$, $d > 0$, $k > 0$ sind Konstanten, die die Masse pro Fläche, den Widerstand und die Federkonstante des Randes beschreiben; $c > 0$ und $\rho > 0$ stehen für die Schallgeschwindigeit in der Flüssigkeit bzw. die Dichte der Flüssigkeit im ungestörten Zustand.

Führe ein geeignetes Energiefunktional ein und zeige, dass diese Energie mit der Zeit abnimmt.

Hinweis: Beachte, dass auch der Rand durch die Auslenkung δ zur Gesamtenergie beiträgt.

3. Betrachte folgende Transformationen $T_\epsilon : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit $T_\epsilon(t,x,z) = (t, x+2\epsilon t, e^{-\epsilon x - \epsilon^2 t} z)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Familie von Transformationen $T := (T_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ eine eindimensionale Transformationsgruppe bildet und bestimme deren infinitisimalen Erzeuger. [4]

4. Sei u eine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung [4]

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Betrachte den Graphen der Funktion u

$$G_u := \{(t,x,u(t,x)) : (t,x) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeige, dass das Bild des Graphen G_u unter den in Aufgabe 3. definierten Transformationen T_ϵ wieder der Graph einer Funktion $\tilde{u}_\epsilon : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ist und diese Funktionen $\tilde{u}_\epsilon$ ebenfalls Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind.