ulm university universität ulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 7

Abgabetermin: Montag, 6.12.2010 in der Vorlesung

1. Die algebraische Gleichung $H(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in J^K$, habe maximalen Rang, d.h. für alle $\mathbf{x} \in J^K$ mit $H(\mathbf{x}) = 0$ ist $\nabla H(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. [4]

   Zeige, dass dann für jede Lösung $(x_0, j_K u_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, der Differentialgleichung $H(x, j_K u)$ ein lokaler Koordinatenwechsel $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{d+d_K})$ existiert, der $(x_0, j_K u_0)$ auf $\mathbf{0} \in J^K$ abbildet und für den die Gleichung $H(x, j_K u) = 0$ in $y_1(x, j_K u) = 0$ übergeht, d.h. $\mathbf{y}$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus

   $$\mathbf{y} : U((x_0, j_K u_0)) \mapsto V(\mathbf{0}), \qquad \mathbf{y}((x, j_K u)) = (y_1, \ldots, y_{d+d_K}),$$

   wobei $U((x_0, j_K u_0)) \subseteq J^K$ eine offene Umgebung von $(x_0, j_K u_0)$ und $V(\mathbf{0}) \subseteq J^K$ eine offene Umgebung der Null in J^K ist.

   Hinweis: Satz über implizite Funktionen.

2. Zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t(t,x) = c u_{xx}(t,x)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ maximalen Rang hat. [4]

3. Proposition 5.28. aus der Vorlesung gibt eine Methode zur Berechnung der K-Jets $j_K A(x, j_K u)$ der infinitesimalen Erzeuger von einparametrischen Transformationsgruppen. [4]

   a) Sei $A = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}$ der infinitesimale Erzeuger einer einparametrischen Transformationsgruppe auf $J^0 = \mathbb{R}^2$. Berechne den 3-Jet $j_3 A(t, j_3 u)$ von A.

   b) Sei $A = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}$ der infinitesimale Erzeuger einer einparametrischen Transformationsgruppe auf $J^0 = \mathbb{R}^3$. Berechne den Koeffizienten ϕ^{tx} von $\frac{\partial}{\partial u_{tx}}$ in $j_2 A(t, x, j_2 u)$.

4. Betrachte den infinitesimalen Erzeuger einer einparametrischen Transformationsgruppe auf J^0 [4+2]

   $$A(x,u) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j(x,u) \frac{\partial}{\partial x_j} + \phi(x,u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

   Zeige, dass der 1-Jet von A die Form

   $$j_1 A(x, j_1 u) = A + \sum_{i=1}^{d} \phi^i(x, j_1 u) \frac{\partial}{\partial u_{x_i}}$$

   hat, wobei die ϕ^i gegeben sind durch

   $$\phi^i = D_i \left(\phi - \sum_{l=1}^{d} \xi_l(x,u) u_{x_i} \right) + \sum_{l=1}^{d} \xi_l(x,u) \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_l};$$

   d.h. beweise Proposition 5.28. aus der Vorlesung für 1-Jets.