Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11
Musterlösung zu Blatt 10

---

1. a) $\|x+y\|^2 = \langle x+y\,,\, x+y\rangle = \langle x\,,\, x\rangle + \langle x\,,\, y\rangle + \langle y\,,\, x\rangle + \langle y\,,\, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

1. b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x\,,\, x\rangle + 2\langle y\,,\, y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

1. c) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x\,,\, y\rangle + 2\langle y\,,\, x\rangle = 4\langle x\,,\, y\rangle + \langle y\,,\, x\rangle \qquad$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 2\langle x\,,\, y\rangle + 2\langle y\,,\, x\rangle + 2i\langle x\,,\, iy\rangle + 2i\langle iy\,,\, x\rangle$
$= 2\langle x\,,\, y\rangle + 2\langle y\,,\, x\rangle + 2\langle x\,,\, y\rangle - 2\langle y\,,\, x\rangle = 4\langle x\,,\, y\rangle \qquad$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. d) $(A^\perp)^\perp = \{y \in H : \langle x\,,\, y\rangle = 0\ \forall x \in A^\perp\} \supseteq A$.

1. e) $x \in H^\perp \quad \Rightarrow \quad \langle x\,,\, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

2. Einfaches Berechnen der jeweiligen Stammfunktion liefert:
$\int_0^1 1 \cdot \cos(2\pi nx)\, dx = 0; \qquad \int_0^1 \cos(2\pi nx) sin(2\pi mx)\, dx = 0, \quad n, m \geq 1;$
$\int_0^1 \cos(2\pi nx)\cos(2\pi mx)\, dx = 0 = \int_0^1 \sin(2\pi nx)\sin(2\pi mx)\, dx, \quad n, m \geq 1,\ n \neq m;$
$\int_0^1 \sin(2\pi nx)\sin(2\pi nx)\, dx = \frac{1}{2} = \int_0^1 \cos(2\pi nx)\cos(2\pi nx)\, dx, \quad n \geq 1;$
$\int_0^1 e^{2n\pi x} e^{-2m\pi x}\, dx = \int_0^1 e^{2(n-m)\pi x}\, dx$, was 0 für $n \neq m$ und 1 für $n = m$ ergibt, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Sei nun f orthogonal zu jedem $e_n \in \{e^{2n\pi i\cdot} : n \in \mathbb{Z}\}$, dann ist wegen $0 = \Big(\int_0^1 f(x) e^{-2n\pi x}\, dx\Big)^- = \int_0^1 \bar{f}(x) e^{2n\pi x}\, dx$ auch die Konjugierte $\bar{f}$ orthogonal zu jedem e_n, also insbesondere auch $\frac{1}{2}(f+\bar{f}) = \mathrm{Re}(f) =: g \in L^2(0,1;\mathbb{R})$ und $\frac{1}{2i}(f-\bar{f}) = \mathrm{Im}(f) =: h \in L^2(0,1;\mathbb{R})$. Es folgt

$$0 = \int_0^1 g(x) e^{-2n\pi x}\, dx = \int_0^1 g(x)\cos(-2n\pi x)\, dx + i\int_0^1 g(x)\sin(-2n\pi x)\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

und insbesondere $\int_0^1 g(x)\cos(2n\pi x)\, dx = 0$ und $\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)\, dx = 0$ für alle $n \geq 0$. Da $\{1, \sqrt{2}\cos(2\pi n\cdot), \sqrt{2}\sin(2\pi m\cdot) : n, m = 1, 2, 3, \ldots\}$ eine Basis von $L^2(0,1;\mathbb{R})$ ist, muss $g = 0$ sein und ebenso $h = 0$, also $f = 0$, woraus sich die Behauptung ergibt.

3. Es existiert genau dann eine Lösung der Form $v(t)w(x)$, wenn $v_t(t)w(x) - v^\gamma(t)\Delta w^\gamma(x) = 0$. D.h. es muss gelten
$$\frac{v_t(t)}{v^\gamma(t)} = \mu = \frac{\Delta w^\gamma(x)}{w(x)} \quad \text{für alle } t, x \text{ mit } v(t), w(x) \neq 0.$$
Für v erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung $v_t(t) = \mu v^\gamma(t)$ mit Lösung $v(t) = \big((1-\gamma)\mu t + \lambda\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.
Für w erhält man die Gleichung $\mu w(x) = \Delta w^\gamma(x)$ und mit dem Ansatz $w(x) = |x|^\alpha$ ($|\cdot|$ euklidische Norm)
$$\mu|x|^\alpha = \Delta|x|^{\alpha\gamma} = \gamma\alpha\big(d + \gamma\alpha - 2\big)|x|^{\alpha\gamma-2},$$
woraus folgt $\alpha = \dfrac{2}{\gamma-1} > 0$ und $\mu = \alpha\gamma(d + \gamma\alpha - 2) > 0$. Man wähle also $\lambda > 0$. Als Lösung der Porösen-Medien-Gleichung ergibt sich $u(t,x) = \big((1-\gamma)\mu t + \lambda\big)^{\frac{1}{1-\gamma}}|x|^{\frac{2}{\gamma-1}}$, d.h. für $x \neq 0$ strebt die Lösung gegen ∞ wenn t gegen $\dfrac{\lambda}{(\gamma-1)\mu}$ geht.

4. Alle Eigenwerte sind echt größer Null wegen

$$\lambda \int_0^l f(x)\bar{f}(x)\,dx = -\int_0^l f''(x)\bar{f}(x)\,dx = \int_0^l f'(x)\bar{f}'(x)\,dx - f'(l)\bar{f}(l) + f'(0)\bar{f}(0)$$
$$= \int_0^l f'(x)\bar{f}'(x)\,dx + b_l f(l)\bar{f}(l) + b_0 f(0)\bar{f}(0) > 0 \quad \text{für } f \neq 0,$$

und zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal aufeinander wegen

$$\lambda \int_0^l f(x)\bar{g}(x)\,dx = \int_0^l -f''(x)\bar{g}(x)\,dx = \int_0^l f'(x)\bar{g}'(x)\,dx + b_l f(l)\bar{g}(l) + b_0 f(0)\bar{g}(0)$$
$$= -\int_0^l f(x)\bar{g}''(x)\,dx = \mu \int f(x)\bar{g}(x)\,dx.$$

Es folgt $(\lambda - \mu)\int_0^l f(x)\bar{g}(x)\,dx = 0$ und damit auch $\int_0^l f(x)\bar{g}(x)\,dx = 0$.

5. Wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert, gilt $\|\sum_{i=1}^N x_i\|^2 \leq M$ für alle $N \geq 1$ und $M \geq 0$ konstant.

Also $\langle\sum_{i=1}^N x_i, \sum_{i=1}^N x_i\rangle = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 \leq M$ für alle $N \geq 1$. Umgekehrt erkennt man aus voranstehender Gleichung, dass $(\sum_{i=1}^N x_i)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in H ist, falls $(\sum_{i=1}^N \|x_i\|^2)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist.

6. Man zeigt zuerst $j_k[\mathbf{v},\mathbf{w}] = [j_k\mathbf{v}, j_k\mathbf{w}]$: Für $k=1$ läßt sich die Aussage (auch im Falle mehrerer abhängiger Variablen) direkt nachrechnen (sehr langwierig) und für $k>1$ kann man per Induktion schließen, in dem man die Komponenten der Form u_J, $|J| \geq 1$, von J^{k-1} als neue, abhängige Variablen auffäßt, dann die Behauptung für $k=1$ anwendet und schließlich die auf $J^1(J^{k-1})$ lebenden Vektorfelder $j_1(j_{k-1}(\mathbf{v}))$ usw. auf den Unterraum $J^k \subset J^1(J^{k-1})$ einschränkt.

Damit erhält man $(j_k[\mathbf{v},\mathbf{w}])H(\cdot) = (j_k\mathbf{v})(j_k\mathbf{w}H(\cdot)) - (j_k\mathbf{w})(j_k\mathbf{v}H(\cdot))$. Nun sind $(j_k\mathbf{w})H =: H_w$ und $(j_k\mathbf{v})H =: H_v$ konstant Null auf der Menge $\mathcal{H} := \{y \in J^k : H(y) = 0\}$. Da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Symmetriegruppen von H erzeugen, verläuft der durch $j_k\mathbf{v}$ bzw. $j_k\mathbf{w}$ gegebene Fluß ganz in $\mathcal{H}$, falls der Startwert in $\mathcal{H}$ liegt, weshalb $(j_k\mathbf{v})H_w(y) = 0$ und $(j_k\mathbf{w})H_v(y) = 0$, wann immer $y \in \mathcal{H}$. Also $(j_k[\mathbf{v},\mathbf{w}])H(y) = 0$ für alle y mit $H(y) = 0$.

7. $[A_i, A_i] = 0$ und $[A_i, A_j] = -[A_j, A_i]$.

$[A_1, A_2] = 2\partial_t = 2A_1$, $[A_1, A_3] = 8t\partial_t + 4x\partial_x - 2u\partial_u = 4A_2 - 2A_6$, $[A_1, A_4] = 0$,
$[A_1, A_5] = 2\partial_x = 2A_4$, $[A_1, A_6] = 0$,

$[A_2, A_3] = 8t^2\partial_t + 8xt\partial_x - 2(2t + x^2)u\partial_u = 2A_3$, $[A_2, A_4] = -\partial_x = -A_4$,
$[A_2, A_5] = 2t - xu\partial_u = A_5$, $[A_2, A_6] = 0$,

$[A_3, A_4] - 4t\partial_x + 2xu\partial_u = -2A_5$, $[A_3, A_5] = 0$, $[A_3, A_6] = 0$,

$[A_4, A_5] = -u\partial_u = -A_6$, $[A_4, A_6] = 0$, $[A_5, A_6] = 0$.

8. Falls $H(x, j_k u) =: H(y) \neq 0$, existiert eine Umgebung U_y von y mit $H(\cdot) \neq 0$ auf U_y und $(j_k A)H(\cdot) = Q_y(\cdot)H(\cdot)$ auf U_y mit $Q_y(\cdot) = (j_k A)H(\cdot)/H(\cdot)$.
Falls $H(y) = 0$, existiert eine Umgebung U_y und ein lokaler Koordinatenwechsel $\mathbf{z}$, so dass $\mathbf{z}(y) = 0$ und $\tilde{H}(z) = H(\mathbf{z}^{-1}(z)) = z_1$ für alle $z \in \mathbf{z}(U_y)$. In diesen Koordinaten geht $(j_k A)H(y')$ über in $(j_k A)\tilde{H}(z') = q_1(z')\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z_1} + q_2(z')\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z_2} + \cdots = q_1(z')$, $z' = \mathbf{z}(y')$, was nach Voraussetzung gleich Null

ist für alle $z' \in \mathbf{z}(U_y)$ mit $z'_1 = 0$, weshalb die Funktion $q_1(z')/z'_1 = (j_k A)\tilde{H}(z')/\tilde{H}(z')$ auf $\mathbf{z}(U_y)$ (q_1 ist stetig differenzierbar) wohldefiniert ist. Setze $\tilde{Q}_y = (j_k A)\tilde{H}(z')/\tilde{H}(z')$, d.h.$(j_k A)H(y') = Q_y(y')H(y')$ für alle $y' \in U_y$ mit $Q_y(y') = \tilde{Q}_y(\mathbf{z}(y'))$.
Wähle nun eine der offenen Überdeckung $(Q_y)_{y\in J^k}$ von J^k untergeordnete Zerlegung der Eins $(f_y)_{y\in J^k}$. Dann ist $(j_k A)H(y') = \sum_{y\in J^k} f_y(y')(j_k A)H(y') = \sum_{y\in J^k} f_y(y')Q_y(y')H(y') = Q(y')H(y')$ für alle $y' \in J^k$ mit $Q(y') := \sum_{y\in J^k} f_y(y')Q_y(y')$.