Partielle Differenzialgleichungen WS 2010/11

Musterlösung zu Blatt 11

1. $iii) \Rightarrow i), ii)$: Sei $y \in A_2$. Dann ist $P_1 y = P_1 P_2 y = P_2 P_1 y \in A_2$. $ii)$ folgt auf gleiche Weise.
   $i) \Rightarrow ii)$: Sei $x \in A_1$, also $x = P_1 x$. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|P_1 P_2 x - P_2 x\|^2 &= \langle P_1 P_2 x - P_2 x, P_1 P_2 x - P_2 x\rangle \\ &= \langle P_1 P_2 x - P_2 P_1 x, P_1 x - P_2 P_1 x\rangle + \langle P_1 P_2 x - P_2 x, P_1 P_2 x - P_1 x\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

   Also $P_2 x = P_1 P_2 x \in A_1$. Und ebenso $ii) \Rightarrow i)$.
   $i), ii) \Rightarrow iii)$ ist falsch. Gegenbeispiel: Sei $A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ und $A_2 := A_1 \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, 1 \leq y \leq 2 - |x|\}$, $z := (1,2)$. Dann sind $i)$ und $ii)$ erfüllt, aber $P_2 P_1 z = (1,1)$ und $P_1 P_2 z = (1/2, 1)$.

2. (a) Jede Konvexkombination von Elementen f und g aus A_1 bzw. A_2 ist mindestens an den Stellen gerade bzw. positv, an denen sowohl f als auch g gerade bzw. positiv sind, also fast überall. Eine Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\mathbb{R})$ konvergiert fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sei nun $f_n \in A_1$ bzw. $f_n \in A_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei N_f die Ausnahmemenge, auf der f_n nicht punktweise konvergiert, und seien N_n, $n \in \mathbb{N}$, die Mengen, auf denen f_n nicht gerade bzw. nicht positiv ist, dann hat $N := N_f \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} N_n)$ Maß Null und die Grenzfunktion f ist zumindest außerhalb von n gerade bzw. positiv.

   (b) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $g \in A_1$, o.B.d.A. sei g überall gerade. Dann ist $\int_{\mathbb{R}} (g(x) - f(x))^2\,dx = \int_0^\infty (g(x) - f(x))^2 + (g(x) - f(-x))^2\,dx$ und der Ausdruck $(g(x) - f(x))^2 + (g(x) - f(-x))^2$ wird punktweise durch $g = P_{A_1} f(x)$ minimiert.
   Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $g \in A_2$, o.B.d.A. sei g überall positiv. $(g(x) - f(x))^2$ wird punktweise durch $g(x) = P_{A_2} f(x)$ minimiert.

3. (b) Definiere $y = P_y x$ und $z = x - y$. Sei $u \in Y$ beliebig. Dann gilt $Re\langle z, u\rangle = Re\langle x - y, (y + u) - y\rangle \leq 0$ und $Re\langle z, u\rangle = Re\langle x - y, y - (y - u)\rangle \geq 0$, also ist $Re\langle z, u\rangle = 0$ und ebenso $Im\langle z, u\rangle = Re\langle z, iu\rangle = 0$, weshalb $z \in Y^\perp$. Weiter gilt für alle $w \in Y^\perp$: $Re\langle x - z, w - z\rangle = Re(\langle y, w\rangle + \langle y - 0, y - x\rangle) \leq 0$, also $z = P_{Y^\perp} x$.
   Aus $x = y' + z'$ mit $y' \in Y$ und $z' \in Y^\perp$ folgt $0 = \|y + z - y' - z'\|^2 = \|y - y'\|^2 + \|z - z'\|^2$, also Eindeutigkeit.

   (a) Sei $0 \neq x \in H$ beliebig und $0 \neq a \in Y$. Dann ist $\dfrac{\|P_Y x\|}{\|x\|} = \dfrac{\|P_Y x\|}{\|P_Y x + P_{Y^\perp} x\|} \leq 1$ und $\dfrac{\|P_Y a\|}{\|a\|} = 1$, also $\|P_Y\| = 1$. Ferner folgt aus (b) sofort: $P_Y x = 0 \Leftrightarrow x \in Y^\perp$.

4. Wir suchen eine Lösung der Gestalt $v(t)w(x)$. Nach Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung erhält man die Bedingung $\dfrac{v_t(t)}{v(t)} = -\mu = \dfrac{w_{xx}(x)}{w(x)}$, was zu den gewöhnlichen Dfgl. $v_t(t) = -\mu v(t)$ mit allgemeiner Lösung $v(t) = \alpha_\mu e^{-\mu t}$ und $w_{xx} = -\mu w(x)$ mit Randbedingungen $w(0) = 0$ und $-w(l) = w'(l)$ führt. Nach Aufgabe 4 von Blatt 10 muss $\mu > 0$ sein ($\mu = 0$ liefert die triviale Lösung). D.h. die allgemeine reelle Lösung ist $w(x) = A\sin(\sqrt{\mu}x) + B\cos(\sqrt{\mu}x)$. Aus $w(0) = 0$ folgt $B = 0$ und aus $-w(l) = w'(l)$ folgt $-\sin(\sqrt{\mu}l) = \sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}l)$, also $-\sqrt{\mu} = \tan(\sqrt{\mu}l)$. Letztere Gleichung hat genau eine Lösung $\sqrt{\mu_k}$ in jedem Intervall $[k(\frac{\pi}{2l}), (k+2)(\frac{\pi}{2l})]$ mit $k \geq 1$ ungerade. D.h. man erhält die Reihendarstellung $\sum_k \alpha_{\mu_k} e^{-\mu_k t} \sin(\sqrt{\mu}x)$.