# Universität Ulm

Besprechung:
**11.11.14, 12 Uhr**
**N24/226**

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

## Übungen zur Funktionalanalysis — Blatt 4

**1.** (i) Es sei $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$, also $\lambda \in \ell^\infty(\mathbb{K})$. Definiere für $1 \leq p \leq \infty$ die Abbildung (2)

$$m_\lambda : \ell^p(\mathbb{K}) \to \ell^p(\mathbb{K}),\ x \mapsto \lambda x,$$

wobei für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $\lambda x$ definiert ist durch die punktweise Multiplikation, also $\lambda x = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zeige, dass $m_\lambda$ wohldefiniert, linear und stetig ist, und bestimme die Operatornorm von $m_\lambda$.

(ii) Es sei $m \in \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$. Definiere (2)

$$T_m : \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R}),\ f \mapsto T_m f,$$

wobei die Funkion $T_m f$ definiert ist durch $T_m f(x) = m(x)\cdot f(x), x \in [0,1]$.
Zeige, dass $T_m$ wohldefiniert, linear und stetig ist, und bestimme die Operatornorm von $T_m$.

**2.** Es bezeichne $c_0 := \left\{ x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ existiert und } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$.

(i) Zeige, dass $c_0$ als abgeschlossener Unterraum eines Banachraumes wieder ein Banachraum ist. (2)

(ii) Es sei $y \in \ell^1(\mathbb{R})$. Zeige, dass (2)

$$J_y : c_0 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$$

ein Element aus dem Dualraum $c_0'$ von $c_0$ definiert.

(iii) Definiere für weiterhin festes $y \in \ell^1(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}$ die Folge $x^{(k)}$ durch (3)

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} \operatorname{sign} y_n, & n \leq k \\ 0, & n > k. \end{cases}$$

Zeige, dass $J_y(x^{(k)})$ gegen $||y||_{\ell^1}$ konvergiert und verwende dies, um zu zeigen, dass $J : \ell^1(\mathbb{R}) \to c_0',\ y \mapsto J_y$ eine Isometrie ist, also $||J_y||_{c_0'} = ||y||_{\ell^1}$. Folgere, dass $J$ injektiv und stetig ist.

— bitte wenden —

(iv) Wir zeigen im Folgenden die Surjektivität. Sei dazu $F \in c_0'$ vorgegeben. Es bezeichne $e_k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ den $k$.-ten Einheitsvektor in $\ell^\infty(\mathbb{R})$. (1)

Zeige, dass $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ in $\ell^\infty(\mathbb{R})$ gilt und folgere $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k F(e_k)$.

Bemerkung: Für den $\ell^\infty$-Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ schreiben wir auch $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$.

(v) Zeige, dass die Folge $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $y_n = F(e_n)$, ein Element von $\ell^1(\mathbb{R})$ ist und verwende dies, um zu zeigen, dass $J : \ell^1(\mathbb{R}) \to c_0'$ surjektiv ist. (2)

**3.** Es sei $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge strikt positiver reeller Zahlen. Definiere den Raum (6)

$$\ell^2_\omega := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ reelle Folge } \mid \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n^2 < \infty\}$$

Zeige: Die Abbildung

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle_\omega : \ell^2_\omega \times \ell^2_\omega \to \mathbb{R},\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n y_n$$

ist ein Skalarprodukt, welcher $\ell^2_\omega$ zu einem Hilbertraum macht.

**Hinweis:** Überprüfe insbesondere, dass das Skalarprodukt wohldefiniert ist. Gehe beim Beweis der Vollständigkeit wie im Beweis von Satz 2.4 vor.