Universität Ulm
Besprechung:
16.12.14, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

1. Sei X ein reeller Banachraum, $Y \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in X$. Ein Element $\bar{y} \in Y$ heißt *Bestapproximation* von Y an x_0 falls gilt:

$$||x_0 - \bar{y}|| \leq ||x_0 - y|| \quad \forall\, y \in Y.$$

(i) Zeige die Existenz einer Bestapproximation in den folgenden Fällen: (2)

(a) $\dim Y < \infty$,

(b) X ist ein Hilbertraum und $Y \subset X$ abgeschlossen.

Zum Unterraum Y definieren wir den *Annihilator* $Y^\perp := \{f \in X' \,|\, f(y) = 0 \,\forall\, y \in Y\}$.

(ii) Zeige: Für alle $f \in Y^\perp$ mit $||f|| \leq 1$ ist $f(x_0) \leq \operatorname{dist}(x_0, Y)$. (1)

(iii) Zeige: Es gibt ein $f \in Y^\perp$ mit $||f|| \leq 1$ und $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$. (1)

(iii) Sei $\bar{f} \in Y^\perp$, $\left|\left|\bar{f}\right|\right| \leq 1$ und $\bar{y} \in Y$. Zeige: (1)
$\bar{y}$ ist die Bestapproximation von Y an x_0 und $\bar{f}$ erfüllt $\bar{f}(x_0) \geq f(x_0)$ für alle $f \in Y^\perp$ mit $||f|| \leq 1$ genau dann, wenn gilt: $\bar{f}(x_0) = ||x_0 - \bar{y}||$.

2. Es sei $1 < p < \infty$. Zeige, dass $\ell^p(\mathbb{K})$ reflexiv ist. (2)

3. (i) Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d.h. für Folgen $x_k \in M$ mit $x_k \rightharpoonup x$ folgt $x \in M$. (3)
Folgere $x \in \overline{\operatorname{conv}\left(\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}\right)}$ für Folgen (x_k), welche schwach gegen x konvergieren.

(ii) Sei X ein Hilbertraum. Zeige: $x_k \to x$ in X $\iff$ $x_k \rightharpoonup x$ in X und $||x_k|| \to ||x||$. (2)

(iii) Sei X ein normierter Raum. Zeige: $x_k \rightharpoonup x$ in X $\iff$ $\iota_X(x_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \iota_X(x)$ in X''. (1)

4. Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Zeige: (4)
T ist stetig genau dann, wenn für alle Folgen (x_k) aus X mit $x_k \rightharpoonup x$ in X folgt: $Tx_k \rightharpoonup Tx$ in Y.

5. Es sei X ein normierter Raum, $x_n \in X$ und $f_n \in X'$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) Ist X zusätzlich ein Banachraum, so folgt: Aus $x_n \to x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X' folgt $f_n(x_n) \to f(x)$ in $\mathbb{K}$. (1)

(ii) Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \to f$ in X' folgt $f_n(x_n) \to f(x)$ in $\mathbb{K}$. (1)

(iii) Im Allgemeinen gilt nicht: $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in X', so folgt $f_n(x_n) \to f(x)$ in $\mathbb{K}$. (1)