Universität Ulm
Besprechung:
21.10.14, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. Zeige: Die Menge aller reellwertigen Folgen $X := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, x_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}\}$ wird mit der Funktion (3)

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

zu einem metrischen Raum.

2. Finde einen metrischen Raum (X,d), ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ so dass gilt: (2)

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \neq \{y \in X \,|\, d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

3. Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

(i) Für $A \subset X$ definiere den Abstand $\operatorname{dist}(x,A) := \inf\{d(x,y) \,|\, y \in A\}$. Zeige für $A \subset X$ und $x \in X$: $x \in \overline{A} \iff \operatorname{dist}(x,A) = 0$ und folgere, dass für abgeschlossenes A und $x \notin A$ gilt: $\operatorname{dist}(x,A) > 0$. (2)

Hinweis: Verwende die Charakterisierung des Abschlusses als Folgenabschluss, was in metrischen Räumen richtig ist (vgl. Bem. nach Def. 1.7).

(ii) Sei $A \subset X$ nicht leer. Zeige, dass (2)

$$\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$$

wohldefiniert und Lipschitzstetig ist.

(iii) Für $A \subset X$ und $r > 0$ setze $B_r(A) := \{x \in X \,|\, \operatorname{dist}(x,A) < r\}$. Zeige, dass für $r_1, r_2 > 0$ gilt: (2)

$$B_{r_1}(B_{r_2}(A)) \subset B_{r_1+r_2}(A).$$

Finde außerdem einen metrischen Raum in dem im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(iv) Sei $\mathcal{A} := \{A \subset X \,|\, A \neq \emptyset, A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen}\}$ und definiere für $A, B \in \mathcal{A}$: (4)

$$d_H(A,B) := \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, A \subset B_\varepsilon(B) \text{ und } B \subset B_\varepsilon(A)\}.$$

Zeige, dass d_H eine Metrik auf $\mathcal{A}$ definiert.

(v) Es sei $X = \mathbb{R}^2$ mit $d((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, für $x, y \in X$. Bestimme $d_H(A,B)$ für $A = \{x \in X \,|\, |x_1| \leq 2, |x_2| \leq 2\}$ und $B = \overline{B_{\sqrt{2}}((7,-7)^T)}$. (2)

4. Zeige, dass der Schnitt zweier offener und dichter Teilmengen eines metrischen Raumes wieder dicht ist. (3)

Hinweis: Die Aufgabenblätter sind einzeln und mit Namen und SLC-Zugang versehen abzugeben.
Achtung: Am Montag, dem 20.10. findet die Vorlesung ausnahmsweise im Raum E18, HeHo 22 statt.