Universität Ulm
Besprechung:
13.01.15, 12 Uhr
N24/226

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

9 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

1. Es sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Zeige: Für alle $x_0 \in X$ existiert eine Bestapproximation $\bar{y} \in M$, also (2)

$$||\bar{y} - x_0|| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum.

(i) Zeige $L^p(\Omega;\mu) \subset L^q(\Omega,\mu)$ für alle $1 \le q \le p \le \infty$. (1)

(ii) Es sei $f \in L^\infty(\Omega;\mu)$. Zeige: $\lim\limits_{p\to\infty} ||f||_{L^p} = ||f||_{L^\infty}$. (3)

3. *Interpolation von Lebesgue-Räumen*
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ und $0 \le \vartheta \le 1$. Definiere $p \in [-\infty, \infty]$ durch die Konvexkombination (2)

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}.$$

Zeige, dass dann gilt: $p \ge 1$ und $L^{p_0}(\Omega;\mu) \cap L^{p_1}(\Omega;\mu) \subset L^p(\Omega;\mu)$, außerdem erfüllen alle $f \in L^{p_0}(\Omega;\mu) \cap L^{p_1}(\Omega;\mu)$ die Abschätzung

$$||f||_{L^p} \le ||f||_{L^{p_0}}^{1-\vartheta}\, ||f||_{L^{p_1}}^{\vartheta}.$$

Achtung: Am Di., den 23. 12. findet keine Übung statt. Das Blatt wird in der Übung am 13.01.2015 zusammen mit dem elften Blatt abgegeben und besprochen.