Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$. Sei weiter $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode $\tau > 0$, d.h. $g(x+\tau) = g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. (3)
Definiere $f_n \in L^p(I)$ durch $f_n(x) = g(nx)$. Zeige, dass gilt:

$$f_n \rightharpoonup \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(x)\,\mathrm{d}x \text{ in } L^p(I).$$

Hinweis: Zeige zunächst $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \frac{b-a}{\tau}\int_0^\tau g(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $[a,b] \subset I$.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (also $\mu(\Omega) = 1$) und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine weitere σ-Algebra. Es sei $\mu_{\mathcal{F}}$ die Restriktion von μ auf $\mathcal{F}$.

(i) Zeige für alle $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu_{\mathcal{F}})$ und alle $A \in \mathcal{F}$, dass gilt: (1^*)

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{F}} = \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

(ii) Es sei $1 \le p < \infty$. Zeige, dass $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu_{\mathcal{F}})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist. (1^*)

(iii) Zeige, dass es für alle $g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein eindeutiges $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ gibt mit (2)

$$\int_A g\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$$

für alle $A \in \mathcal{F}$.
Die Funktion f heißt der *bedingte Erwartungswert von g gegeben $\mathcal{F}$* und wird auch mit $\mathbb{E}(g \,|\, \mathcal{F})$ bezeichnet.

(iv) Zeige, dass der bedingte Erwartungswert auf $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ die orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu_{\mathcal{F}})$ ist. (2)

3. Es sei $1 \le p \le \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren (fast überall) die *Faltung* $f * g$ von f mit g durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

(i) Zeige, dass gilt: $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und es ist (2)

$$||f * g||_{L^p} \le ||f||_{L^1}\,||g||_{L^p}\,.$$

(ii) Es sei $h \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Definiere h_ε wie in der Vorlesung fast überall durch (1)

$$h_\varepsilon(x) := \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y,\ x \in \mathbb{R}^n$$

wobei φ_ε der Standard-Mollifier im $\mathbb{R}^n$ ist.
Zeige: $h_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ mit $||h_\varepsilon||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le ||h||_{L^p(\Omega)}$.

Achtung: Am Di., den 23. 12. findet keine Übung statt. Das Blatt wird in der Übung am 13.01.2015 zusammen mit dem zehnten Blatt abgegeben und besprochen.

Erholsame Feiertage und einen guten Rutsch!