Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

1. Metrische Räume und Kompaktheit

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ präkompakt. Zeige: A ist beschränkt und $\overline{A}$ ist präkompakt. (3)

Hinweis: Zeige zunächst, dass für $x \in \overline{A}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in A$ existiert mit $d(x, y) < \varepsilon$.

(ii) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$. Zeige: A ist präkompakt genau dann, wenn $\overline{A}$ kompakt ist. (3)

(iii) Finde einen nicht-vollständigen metrischen Raum und eine Teilmenge A, so dass die Äquivalenz aus (ii) nicht gilt. (2)

2. Korollar 1.17

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X so dass gilt: (3)

$$B_n \text{ ist abgeschlossen } \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Zeige, dass eine der Mengen B_n einen inneren Punkt enthält, also ein $x \in B_{n_0}$ mit $B_\varepsilon(x) \subset B_{n_0}$ für ein $\varepsilon > 0$.

Ein Punkt $x \in X$ in einem metrischen Raum X heißt **isoliert**, falls eine positive Zahl ε existiert mit $B_\varepsilon(x) = \{x\}$.

3. Zeige, dass jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte überabzählbar viele Punkte besitzt. (4)
Folgere, dass es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt.

4. Zeige, dass jede Vektorraumbasis eines unendlichdimensionalen Banachraumes (d.h. eines normierter Vektorraumes, welcher vollständig bezüglich der von der Norm erzeugten Topologie ist) überabzählbar ist. (5)

Erinnerung: Eine Menge $B = \{b_i \in V \mid i \in I\}$ ist genau dann Basis eines Vektorraumes V, wenn sich jedes Element aus V auf eindeutige Weise als eine endliche Linearkombination von Elementen aus B schreiben lässt.