Universität Ulm
Besprechung:
27.10.14, 13 Uhr
HeHo220

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 1

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere

$$\tau_d := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset U\},$$

wobei die offene Kugel wie üblich definiert ist durch $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. Zeige: (X, τ_d) ist ein topologischer Hausdorff-Raum, welcher dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

2. (i) Betrachte $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ mit der durch den Betrag erzeugte Topologie. Überprüfe, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ eine Karte ist, welche $\mathbb{R}$ zu einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension 1 macht. Ist diese Karte kompatibel zur Karte $(\psi, \mathbb{R})$, gegeben durch $\psi = \mathrm{id}_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$?

(ii) Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer von einer Norm erzeugten Topologie. Zeige, dass V eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Diese Struktur nennen wir glatte Standardstruktur auf V.
Folgere, dass die Menge der reellen $n \times n$-Matrizen eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
Hinweis: Verwende die Existenz eines Vektorraumisomorphismus $\Phi : V \to \mathbb{R}^{\dim V}$.

(iii) Zeige, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n^2 ist.
Hinweis: Zeige zunächst, dass jede offene Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit wieder eine glatte Mannigfaltigkeit der selben Dimension ist.