



---

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 2

---

1. Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Mengenfamilie, für welche gilt:

(a)  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  und

(b) Für alle  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $x \in B_1 \cap B_2$  existiert ein  $B_3 \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Zeige:

$$\tau(\mathcal{B}) := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, I \text{ beliebige Indexmenge} \right\}$$

ist eine Topologie auf  $X$ , und  $\mathcal{B}$  ist eine Basis dieser Topologie.

2. Es bezeichne  $N$  den Nordpol  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , und  $S = -N$  den Südpol. Die **Stereografische Projektion**  $\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$\sigma(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \dots, x^n)}{1 - x^{n+1}}.$$

Definiere außerdem  $\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(-x)$  für  $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ .

(i) Zeige, dass für jedes  $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  gilt:  $\sigma(x) = u$ , wobei  $(u, 0)$  der Schnittpunkt der Geraden durch  $N$  und  $x$  mit dem Unterraum  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^{n+1} = 0\}$  ist.

Zeige analog, dass  $\tilde{\sigma}(x)$  der Schnittpunkt der Gerade durch  $S$  und  $x$  mit dem selben Unterraum ist.

(ii) Zeige, dass  $\sigma$  bijektiv ist und für die Inverse gilt

$$\sigma^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \frac{(2u^1, \dots, 2u^n, \|u\|^2 - 1)}{\|u\|^2 + 1}.$$

(iii) Berechne den Kartenwechsel  $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}$  und verwende diese Rechnung um zu zeigen, dass ein glatter Atlas für  $\mathbb{S}^n$  existiert, welcher die beiden Karten  $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \sigma)$  und  $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \tilde{\sigma})$  enthält.

(iv) Zeige, dass diese glatte Struktur mit der glatten Struktur auf  $\mathbb{S}^n$  übereinstimmt, welche am Freitag, den 31. Oktober in Beispiel (4) definiert wird/wurde.