Universität Ulm

Besprechung:
10.11.14, 13 Uhr
E18, HeHo22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 3

1. (i) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, $c \in \mathbb{R}$ und $M := \Phi^{-1}(\{c\})$ die zugehörige Niveaumenge. Es gelte für alle $a \in M$ dass die totale Ableitung $D\Phi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nicht verschwindet.
Zeige mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist.

(ii) Es sei $R > r > 0$. Verwende den ersten Teil der Aufgabe, um zu zeigen, dass der Rotationstorus

$$\left\{((R + r\cos\varphi)\cos\psi, (R + r\cos\varphi)\sin\psi, r\sin\varphi) \;\middle|\; \varphi, \psi \in \mathbb{R}\right\}$$

eine zweidimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist.
Hinweis: Verwende, dass der Torus geschrieben werden kann als

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\|(x,y,z) - \frac{R\,(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\|^2 = r^2\right\}.$$

2. Es sei $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ mit der glatten Standardstruktur und $\tilde{\mathbb{R}}$ die selbe topologische Mannigfaltigkeit mit der glatten Struktur von Aufgabe 2 (i), Blatt 1 (der zur Karte $\varphi : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ gehörige Atlas).
Sei weiter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt ($\mathcal{C}^\infty$ im üblichen Analysis 1 - Sinne). Zeige:

(i) $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ ist glatt als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

(ii) $f : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ ist glatt als Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, wenn $f^{(n)}(0) = 0$ ist für alle $n \notin \{3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
Hinweis: Betrachte die Taylorentwicklung von f.