Universität Ulm

Besprechung:
08.12.14, 13 Uhr
E18, HeHo22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 6

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen und $p \in U$. Sei $\iota : U \to M, x \mapsto x$ die Inklusion. Zeige, dass $\mathrm{d}\iota_p : T_pU \to T_pM$ ein Isomorphismus ist.

2. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ glatt, $p \in M$, (U, φ) eine Karte in p für M und (V, ψ) eine Karte in $F(p)$ für N. Zeige, dass für alle i gilt:

$$\mathrm{d}F_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{F(p)},$$

wobei $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ und $\hat{p} = \varphi(p)$ sind. Beachte die Einsteinsche Summenkonvention!

3. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe **2.** von Blatt 5.

(i) Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$. Zeige, dass gilt:

$$\mathrm{d}\gamma_0 \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 \right) = \gamma'(0).$$

(ii) Zeige: Ist (V, ψ) eine Karte um p mit assoziierter Basis $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p \right\}$ von T_pM, so ist

$$\gamma'(0) = (\hat{\gamma}^j)'(0) \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p,$$

wobei $\psi \circ \gamma = (\hat{\gamma}^1, \dots, \hat{\gamma}^n)$ ist.

(iii) Zeige, dass die Abbildung $\Psi : \mathcal{V}_pM \to T_pM$ surjektiv ist.