Universität Ulm

Besprechung:
15.12.14, 13 Uhr
E18, HeHo22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 7

1. Wir betrachten eine geeignete (nicht zu spezifizierende) offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit den Standardkoordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten $(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$.
Sei $\hat{p} = (r, \vartheta) = (2, \frac{\pi}{2}) \in M$, $v := 3\, \frac{\partial}{\partial r}\big|_p - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\big|_p \in T_pM$.

(i) Bestimme $v(f)$, wobei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\hat{f}(r, \vartheta) = r\frac{e^{r^2}\cos\vartheta}{2}.$$

(ii) Entwickle v in der Basis $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \right\}$.

(iii) Bestimme $v(g)$, wobei $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ in Standardkoordinaten definiert ist durch

$$\hat{g}(x, y) = \frac{1}{2}xe^{y^2+x^2}.$$

2. Es seien (x, y) die Standardkoordinaten in $\mathbb{R}^2$.

(i) Überprüfe, dass die Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y})$, definiert durch

$$\tilde{x} = x, \tilde{y} = y + x^3,$$

mit den Standardkoordinaten kompatibel auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$ sind.

(ii) Sei $\hat{p} = (x, y) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Zeige:

$$\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p \neq \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\bigg|_p .$$

3. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Wir definieren das *globale Differential* $dF : TM \to TN$ punktweise durch $dF(p, v) := (F(p), dF_p(v)), v \in T_pM$. Zeige, dass dF eine glatte Abbildung ist.

Bemerkung:
Aus Aufgabe 1. von Blatt 5 folgt damit für $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatt:

(i) $\mathrm{d}(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{TM}$.

(ii) $\mathrm{d}(G \circ F) = \mathrm{d}G \circ \mathrm{d}F : TM \to TP$.

(iii) Ist F ein Diffeomorphismus, so ist $\mathrm{d}F$ ein Diffeomorphismus mit $(\mathrm{d}F)^{-1} = \mathrm{d}(F^{-1})$.