Universität Ulm
Besprechung:
19.01.15, 13 Uhr
E18, HeHo22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 14/15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Glatte Mannigfaltigkeiten Blatt 10

1. Es sei $\mathbb{RP}^n := \{V \subset \mathbb{R}^{n+1} | V \text{ ist ein eindimensionaler Unterraum}\}$.

(i) Definiere für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$x \sim y :\iff \exists\, \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

Zeige: Dies ist eine Äquivalenzrelation und es gilt ${}^{\mathbb{R}^{n+1}}/_{\sim} = \mathbb{RP}^n$.

(ii) Für ein Element $[x] \in \mathbb{RP}^n$ schreiben wir $[(x_1, \dots, x_{n+1})] =: [x_1, \dots, x_{n+1}]$. Ferner definieren wir $U_1, \dots, U_{n+1} \subset \mathbb{RP}^n$ durch

$$U_i := \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \,\big|\, x_i \neq 0\}$$

und

$$\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i), [x_1, \dots, x_{n+1}] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Zeige, dass φ_i wohldefiniert und bijektiv ist.

(iii) Zeige, dass die Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ glatte Diffeomorphismen sind und folgere, dass $\mathbb{RP}^n$ eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

2. Klassifiziere mit Hilfe von Aufgabe 1. alle $G_k(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq n \leq 3$, $0 \leq k \leq n$.

3. Bonusaufgabe: Ist $\mathbb{RP}^1$ orientierbar? Was ist mit $\mathbb{RP}^2$?