Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 01

1. (i) Sei $E := \{A, B, C\}$ Finde alle möglichen Teilmengen $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$ der Potenzmenge von E, so dass $(E, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene ist. (1)

(ii) Es sei K ein Körper und $E := K \times K$. Es sei weiter $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$ definiert durch $\ell \in \mathcal{G}$ genau dann, wenn $a, b, c \in K$ existieren mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und es gilt:

$$\ell = \ell_{abc} := \{(x, y) \in E \,\big|\, ax + by = c\}.$$

Zeige:

(a) Für zwei Geraden $\ell_{abc}, \ell_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}$ mit $a, b, c, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in K$, $(a, b) \neq (0, 0) \neq (\tilde{a}, \tilde{b})$ gilt: $\ell_{abc} = \ell_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}$ genau dann, wenn ein $\lambda \in K$ existiert mit $\lambda \neq 0$ und (3)

$$\lambda(a, b, c) = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}).$$

(b) $(E, \mathcal{G})$ ist eine Inzidenzebene. (4)

2. Es sei $(E, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene. Zeige:

(i) Sind $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, so ist genau einer der folgenden drei Fälle erfüllt: (2)

(a) $g_1 = g_2$.

(b) $g_1 \cap g_2 = \{P\}$ für ein $p \in E$.

(c) $g_1 || g_2$.

(ii) Für alle $g \in \mathcal{G}$ existiert ein $P \in E$ mit $P \notin g$. (1)

(iii) Für alle $P \in E$ existiert ein $g \in \mathcal{G}$ mit $P \notin g$. (3)

(iv) Es gibt $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ paarweise verschieden mit $g_1 \cap g_2 \cap g_3 = \emptyset$. (2)

3. Überprüfe, ob folgende Mengen $(E, \mathcal{G})$ Inzidenzebenen sind: (4)

(i) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > 0\}$ und $\mathcal{G} := \{\ell_a \,\big|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\ell_{b,r} \,\big|\, b, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ wobei diese Geraden definiert sind als

$$\ell_a := \{(x, y) \in E \,\big|\, x = a\} \text{ und } \ell_{b,r} := \{(x, y) \in E \,\big|\, (x - b)^2 + y^2 = r^2\}.$$

(ii) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit
$\mathcal{G} := \{E \cap U \,\big|\, U \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist ein zweidimensionaler Unterraum}\}$.

Hinweis: Hier können aussagekräftige und nachvollziehbare Skizzen ausnahmsweise als Nachweis genügen.

Achtung: Die Lösungen bitte zu zweit vor der Übung abgeben. Vergesst nicht, euch im Moodle für diese Veranstaltung anzumelden.
In der kommenden Übung wird der Termin für die Klausur festgelegt. Dazu ist es notwendig, dass ihr eure anderen Klausurtermine parat habt, denn zu einem späteren Zeitpunkt kann auf Konflikte keine Rücksicht mehr genommen werden.