Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 15

20 Punkte

Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 03

Falls nicht anders vermerkt so bezeichne im Folgenden E stets eine Hilbertebene.

1. Beweise den verbleibenden Teil von Satz 1.37, also zeige:
Ist g eine Gerade und $P \in g$, so existiert eine zu g orthogonale Gerade durch P. (3)
Hinweis: In der Vorlesung wurde die Existenz einer solchen Gerade für $P \in E \setminus g$ bereits gezeigt.

2. (i) Es sei ein Dreieck $\triangle(A, B, C)$ mit $\overline{AB} = \overline{AC}$ gegeben. Zeige: (4)

$$\sphericalangle(A, B, C) \simeq \sphericalangle(A, C, B).$$

(ii) Beweise den dritten Kongruenzsatz (WSW-Satz), also: (5)
Sind zwei Dreiecke $\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(P, Q, R)$ gegeben, und es gilt $\sphericalangle(B, A, C) \simeq \sphericalangle(Q, P, R)$, $\sphericalangle(A, C, B) \simeq \sphericalangle(P, R, Q)$ und $\overline{AC} = \overline{PR}$, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

3. Es sei K ein euklidischer Körper und E die affine Ebene über K. Zeige, dass E mit den Definitionen aus Satz 1.46 das Kongruenzaxiom (K6) erfüllt. (4)
Hinweis: Damit wurde nun vollständig bewiesen, dass die affine Ebene über einem euklidischen Körper eine Hilbertebene ist.

4. Es sei $K = \mathbb{Q}$ und E die affine Ebene über $\mathbb{Q}$. Definiere die Kongruenz (4)

$$AB \cong CD :\Leftrightarrow (B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 = (C_1 - D_1)^2 + (C_2 - D_2)^2,$$

wobei $A = (A_1, A_2)$ die Komponenten bezeichnen.
Prüfe, welche der Axiome $(K1)$, $(K2)$ und $(K3)$ erfüllt sind.