Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
16.06.15, 08:15 Uhr
H14

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 15

20 Punkte

Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 07

1. Zeige den SSS-Kongruenzsatz in der Euklidischen Geometrie, also dass zwei Dreiecke bereits kongruent sind, falls ihre Seitenlängen gleich sind. (6)

2. Es sei die Abbildung

$$\mathrm{d}\colon \mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{R};\ (x_1+iy_1, x_2+iy_2)\mapsto \operatorname{Arcosh}\left(1+\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}\right)$$

gegeben. Zeige:

(i) d ist positiv definit und symmetrisch. (2)

(ii) Es gilt $\mathrm{d}(x+i, x+mi) = \mathrm{d}(x+i, x+\frac{1}{m}i) = |\log m|$ für alle $x\in\mathbb{R}, m>0$. (2)

Für komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ mit $\{z_1, z_2\}\cap\{z_3, z_4\}=\emptyset$ bezeichne

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$$

das **Doppelverhältnis** von z_1, z_2, z_3, z_4.

Es gilt folgender Satz (Satz 2.3.5 aus dem Geometrie-Skript von Prof. Lütkebohmert, 2007):
Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \notin \{z_3, z_4\}$ und z_2, z_3 und z_4 seien paarweise verschieden. Dann ist $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ reell genau dann, wenn die Punkte z_i auf einem Kreis oder einer Geraden in $\mathbb{C}$ liegen. Weiter ist im ersten Fall $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$ genau dann, falls z_3 und z_4 zur selben Zusammenhangskomponente der Kreislinie ohne $\{z_1, z_2\}$ gehören. Im zweiten Fall ist das Doppelverhältnis positiv genau dann, wenn z_1 und z_2 entweder beide zwischen oder beide nicht zwischen z_3 und z_4 liegen.

Für zwei Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ definieren wir $\tilde{\mathrm{d}}(z_1, z_2)$ wie folgt:

- Ist $z_1, z_2 \in g_{x,r}$ und $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$, so ist $\tilde{\mathrm{d}}(z_1, z_2) = |\log \mathrm{DV}(z_1, z_2, x-r, x+r)|$.
- Ist dagegen $z_1, z_2 \in g_\alpha$, so ist $\tilde{\mathrm{d}}(z_1, z_2) = \left|\log \frac{z_1-\alpha}{z_2-\alpha}\right|$.

3. (i) Zeige: $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(z_2, z_1, z_3, z_4)^{-1} = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_4, z_3)^{-1}$. (1)

(ii) Zeige, dass $\tilde{\mathrm{d}}\colon \mathbb{H}\times\mathbb{H}\to[0,\infty)$ wohldefiniert und symmetrisch ist. (2)

(iii) Es sei $iy_1, iy_2 \in \mathbb{H}$ mit $y_1 < y_2$. Zeige, dass gilt: (3)

$$\tilde{\mathrm{d}}(iy_1, iy_2) = \lim_{t\searrow 0}\tilde{\mathrm{d}}(iy_1, iy_2+t).$$

Bemerkung: Es lässt sich auch allgemeiner für $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ und $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$ die Gleichung $\tilde{\mathrm{d}}(z_1, z_2) = \lim_{t\to 0, t\in\mathbb{R}}\tilde{\mathrm{d}}(z_1, z_2+t)$ zeigen.

— bitte wenden —

4. Es sei die **Riemannsche Zahlenkugel** definiert als $\mathbb{C}$ mit einem zusätzlichen Punkt $\infty \notin \mathbb{C}$, also $\mathbb{P}^1\mathbb{C} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Weiter definieren wir für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ die Abbildung (4)

$$\varphi_A \colon \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \notin \{\frac{-d}{c}, \infty\}, \\ \infty, & z = \frac{-d}{c} \text{ oder } z = \infty, c = 0, \\ \frac{a}{c}, & z = \infty, c \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass gilt: $\varphi_A \colon \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist bijektiv und es ist $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$, $\varphi_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ und $(\varphi_A)^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$.