Übungen zur Vorlesung Geometrie

Blatt 11

1. Es sei die ebene Kurve $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch (2)

$$\gamma(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Krümmung $k(t)$.

2. Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ ein nach Bogenlänge parametrisierter $\mathcal{C}^2$-Weg mit Krümmung k. Der Weg verlaufe in einer Kreisscheibe vom Radius R, also $||\gamma(t)|| \leq R$ für alle $t \in I$. In $t_0 \in I$ berühre γ den Rand der Kreisscheibe, also $||\gamma(t_0)|| = R$. (3)
Zeige, dass $|k(t_0)| \geq \frac{1}{R}$ ist.
Hinweis: Die Funktion $t \mapsto \frac{1}{2}\,||\gamma(t)||^2$ nimmt also in t_0 ein lokales Maximum an.

3. Es bezeichne $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$. Zeige für Vektoren a, b, c und $d \in \mathbb{R}^3$:

(i) $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$. (2)

(ii) $\langle a, b \times c\rangle = \langle b, c \times a\rangle$. (1)

(iii) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle\langle a, d\rangle$ (Lagrange-Identität). (1)

(iv) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$ (Jacobi-Identität). (1)

4. Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ ein nach der Bogenlänge parametrisierter $\mathcal{C}^4$-Weg mit begleitendem Dreibein (γ', n, b) sowie Torsion τ und Krümmung k. Zeige:

(i) $\langle b''(t), n(t)\rangle = -\tau'(t)$. (2)

(ii) $\langle n''(t), n(t)\rangle = -(k(t)^2 + \tau(t)^2)$. (2)

5. Es sei die Raumkurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Zeige, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist. (1)

(ii) Bestimme das begleitende Dreibein von γ und berechne die Krümmung und die Torsion. (5)

Hinweis: Zum Bestehen der Vorleistung müssen insgesamt 110 Punkte erreicht werden.