Universität Ulm

Besprechung:

01.07.15, 12:30 Uhr

He18 E60

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 15

Keine Punkte

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Geometrie Blatt III

1. Finde zwei verschiedene, nichtkonstante Vektorfelder X, Y auf $\mathbb{R}^2$ mit $[X, Y] = 0$, und zwei Vektorfelder X, Y, deren Lieklammer nicht verschwindet.

2. Es sei $f\colon (0,1) \to (0,\infty)$ eine glatte Abbildung.
Bestimme die Metrik auf $M := (0,1) \times \mathbb{R}$, welche sich durch Zurückziehen der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ durch die Immersion

$$F\colon (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (f(x)\cos(y), f(x)\sin(y), x)$$

ergibt. Berechne die Christoffelsymbole des euklidischen Zusammenhangs und des durch Zurückziehen erhaltenen Zusammenhangs auf M.

3. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang ∇. Sei weiter $c\colon I \to M$ eine glatte Kurve und $t_0, t_1 \in I$. Zeige, dass die Parallelverschiebung

$$P_{t_0 t_1}\colon T_{c(t)}M \to T_{c(t_1)}M, V_0 \mapsto V(t_1),$$

(wobei V das eindeutige parallel Vektorfeld längs c mit $V(t_0) = V_0$ ist) ein Vektorraumisomorphismus ist.
Was lässt sich außerdem über $P_{t_0 t_1}$ sagen, falls M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang?

4. (*) Es sei ∇ ein Zusammenhang auf M, X, Y Vektorfelder und c eine Kurve durch $p = c(0)$ mit $\dot{c}(0) = X_p$. Sei $P_{0t}\colon T_pM \to T_{c(t)}M$ die Parallelverschiebung längs c. Zeige, dass dann gilt:

$$\nabla_X Y|_p = \lim_{t\to 0} \frac{P_{0t}^{-1}(Y_{c(t)}) - Y_p}{t}.$$

5. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang und $p \in M$. Betrachte die konstante Kurve $c\colon I \to M$, $c(t) = p$. Sei V ein Vektorfeld längs c, also eine differenzierbare Abbildung $V\colon I \to T_pM$. Zeige, dass $\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt}$ ist, wobei $\frac{dV}{dt}$ die gewöhnliche Ableitung der vektorraumwertigen Funktion V ist.

— bitte wenden —

6. Es sei $F\colon M \to F(M) =: S \subset N$ eine Einbettung von M in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(N, \bar{g})$. Insbesondere ist dann S eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Metrik einfach die Restriktion von $\bar{g}$ auf S ist. Sei g die durch Zurückziehen auf M erhaltene Metrik. Ferner sei $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf N.

(i) Zeige, dass $F\colon M \to S$ eine Isometrie ist.
Bemerkung: Aus diesem Grund können wir M mit S identifizieren.

(ii) Es seien nun Vektorfelder X, Y auf M gegeben. Diese lassen sich dann mit Vektorfeldern auf S identifizieren. Es gebe eine offene Menge $U \subset N$ mit $S \subset U$, so dass sich die Vektorfelder glatt zu Vektorfeldern $\bar{X}, \bar{Y}$ auf U fortsetzen lassen.
Wir definieren nun $\nabla_X Y$ als den tangentialen Anteil von $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$, also punktweise als Bild der orthogonalen Projektion auf den Tangentialraum von $S \cong M$, der ein Unterraum des Tangentialraumes von N ist.
Zeige, dass ∇ ein Zusammenhang auf M ist.

(iii) Zeige, dass ∇ sogar der Levi-Civita Zusammenhang auf (M, g) ist.

*(iv) Zeige, dass obige Projektion $\nabla_X Y$ nicht von der Wahl der Fortsetzung abhängt.

Bemerkung: Da Immersionen lokal Einbettungen sind, lässt sich dieses Argument auch auf Immersionen anwenden, indem man die Mannigfaltigkeit M eventuell verkleinert.

7. Bestimme die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs im hyperbolischen Raum $(\mathbb{H}^n, g)$. Hier ist

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \text{ und } g_{(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{1}{x_n^2}\,\mathrm{Id}\,.$$