



Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 02

6. Zeige oder widerlege, dass folgende Mengen d -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind.

(i) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y + z = 0, 2x^2 + 3xy + 2y + 3z = 0\}, d = 1. \quad (1)$

(ii) $M_1 = (-1, 1) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2, d = 1. \quad (1)$

(iii) $M_2 = \{0\} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2, d = 1. \quad (1)$

(iv) $M = M_1 \cap M_2 \subset \mathbb{R}^2, d = 1$, wobei M_1, M_2 die Mengen aus den Teilen (ii) und (iii) seien. (1*)

(v) $M = M_1 \cup M_2 \subset \mathbb{R}^2, d = 1$, wobei M_1, M_2 die Mengen aus den Teilen (ii) und (iii) seien. (1*)

(vi) $M = \{(t^3, -t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-1, 1)\}, d = 1. \quad (1)$

(vii) $M = \text{Kern } A, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig, $d = \dim \text{Kern } A. \quad (1)$

(viii) $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, $d = \dim M. \quad (1)$

(ix) $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ für zwei d_i -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, 2$ ($d = d_1 + d_2, n = n_1 + n_2$). (2)

(x) Die **orthogonale Gruppe** $O(k) := \{A \in \mathbb{R}^{k \times k} \mid A^T A = I_k\} \subset \mathbb{R}^{k \times k}, d = \frac{1}{2}k(k-1), n = k^2. \quad (4*)$

Anleitung: Überprüfe zunächst, dass die Menge der symmetrischen Matrizen $\text{Symm}(k) := \{A \in \mathbb{R}^{k \times k} : A = A^T\}$ ein $\frac{k(k+1)}{2}$ -dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^{k \times k}$ ist und dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{k \times k} \rightarrow \text{Symm}(k), A \mapsto A^T A - I_k$ wohldefiniert und C^∞ ist. Zeige $D\varphi(A)(B) = B^T A + A^T B$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und folgere, dass $D\varphi(A) : \mathbb{R}^{k \times k} \rightarrow \text{Symm}(k)$ surjektiv für alle $A \in O(k)$ ist.

7. Zeige Satz 2.6, also dass eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ offene Umgebungen $U = U(a) \subset \mathbb{R}^n, V = V(0) \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $F : U \rightarrow V$ gibt, so dass gilt: (6)

$$F(M \cap U) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{d+1} = \dots = y_n = 0\} \cap V.$$

Hinweis: Satz 2.4.

— bitte wenden —

8. Es sei $M := \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und es bezeichne $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, $S := -N \in \mathbb{S}^n$ die beiden Pole. Sei weiter die Funktion P_N definiert durch

$$P_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\},$$

die jeden Punkt $p \in \mathbb{S}^n$, $p \neq N$ auf den Schnittpunkt der Geraden durch p und N mit der Ebene $\mathbb{R}^n \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ abbildet. P_S sei analog definiert.

- (i) Skizziere die Situation im Falle der Betrachtung der 1-Sphäre $\mathbb{S}^1$. (0)
- (ii) Berechne $P_N(x)$ für $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ und $P_S(x)$ für $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. (2)
- (iii) Zeige, dass P_N und P_S bijektiv sind und berechne die Umkehrfunktionen. (3)
- (iv) Zeige: P_N lässt sich zu einer $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1\}, \mathbb{R}^n)$ - Funktion fortsetzen (P_S analog). Zeige weiter, dass die beiden Umkehrfunktionen ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$ sind als Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^{n+1}$. (1)

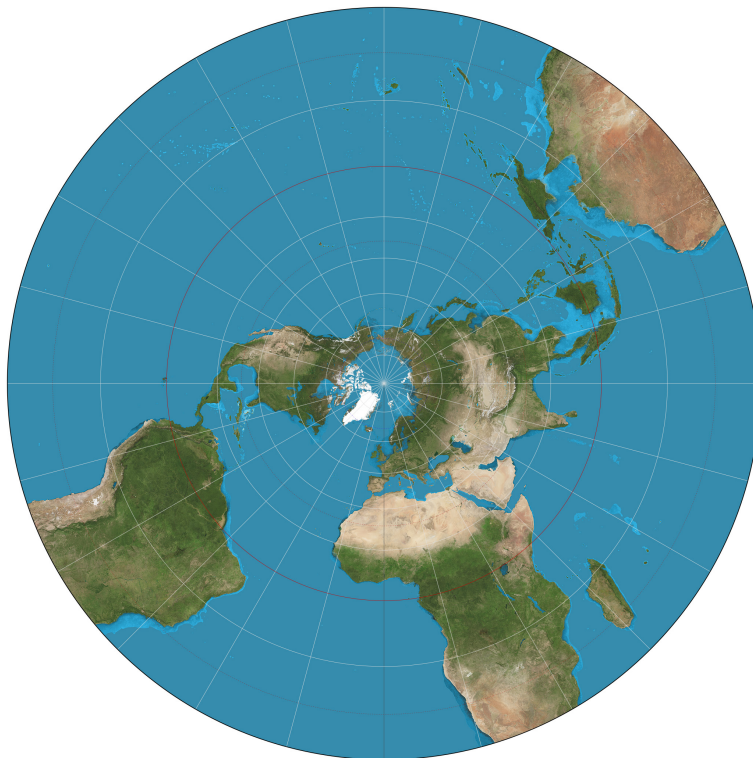


Abbildung 1: Ein Teil des Bildes von P_S , angewendet auf die Oberfläche der Erde. Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Stereographic_projection_sw.jpg