Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
22.12.15, 16 Uhr
H12

Dr. F. Stoffers
A. Spener
WS 15/16

20+5* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 05

19. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres beschränktes Gebiet mit $\mathcal{C}^1$-Rand.

(i) **Die Poincaré-Ungleichung**
Es bezeichne $\operatorname{diam}(G) := \sup\{|x-y| \mid x, y \in G\}$. Zeige, dass eine Konstante $C = C(n, \operatorname{diam}(G)) > 0$ existert, so dass für alle stetig differenzierbaren Funktionen $u \colon \bar{G} \to \mathbb{R}$, welche auf dem Rand von G verschwinden, gilt: (7)

$$||u||_{L^2(G)} := \left(\int_G |u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_G |\nabla u|_2^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = C \,||\, |\nabla u|_2 ||_{L^2(G)} .$$

Anleitung: Setze zunächst zusätzlich voraus, dass $G \subset B_{\operatorname{diam}(G)}(0)$ gilt. Schreibe das Quadrat des linken Integrals als $\int_G u^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_G u^2 \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x$, wobei φ die Identität auf $\bar{G}$ bezeichnet, und wende Aufg. 17.(i) in der komponentenweisen Fassung an. Schätze das verbleibende Integral zwei mal mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab; zunächst den Integranden punktweise und anschließend für das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_{L^2(G)} := \int_G fg \,\mathrm{d}x$ auf dem Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf G.

(ii) Es sei (2)

$$\sigma_P(-\Delta) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists\, u \not\equiv 0 \in \mathcal{C}^2(\bar{G}, \mathbb{R}) \text{ mit } -\Delta u = \lambda u \text{ in } G, u = 0 \text{ auf } \partial G\}$$

Zeige

$$\inf \sigma_P(-\Delta) > 0$$

mit Hilfe der Lösung der Aufgabe 18.(i) vom letzten Blatt.

20. Zeige Lemma 3.14, also: Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X \in \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R}^2)$, $O \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $X(U) \subset O$ und $f \in \mathcal{C}^1(O;\mathbb{R}^3)$, so gilt auf U: (5)

$$\langle \operatorname{rot} f(X), \frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}\rangle = \operatorname{div} h$$

mit $h \in \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R}^2)$ definiert als $h = (\langle f \circ X, \frac{\partial X}{\partial v}\rangle, -\langle f \circ X, \frac{\partial X}{\partial u}\rangle)$.

21. Das Möbiusband
Gegeben sei die immersierte Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, ein **Möbiusband**, durch

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{u}{2}\cos\frac{v}{2})\cos v \\ (1 + \frac{u}{2}\cos\frac{v}{2})\sin v \\ \frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \end{pmatrix} \text{ für } u \in (-1,1) \text{ und } v \in \mathbb{R}.$$

Wenn wir X im zweiten Argument auf ein halboffenes Intervall der Länge 2π einschränken ergibt sich eine Bijektion.

— bitte wenden —

Der Rand $\partial M = \gamma_1([0,2\pi)) \cup \gamma_2([0,2\pi))$ ist zusammenhängend und lässt sich durch die beiden Kurven

$$\gamma_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\cos t \\ (1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\sin t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\cos t \\ (1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\sin t \\ \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

parametrisieren, also $\partial M = \gamma([0,2\pi))$ für die Kurve

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0,\pi] \\ \gamma_2(2t-2\pi), & t \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Weiter seien $O := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)^T | z \in \mathbb{R}\}$ und

$$P = (P^1, P^2, P^3) : O \to \mathbb{R}^3, (x,y,z)^T \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

(i) Bestimme $\operatorname{rot} P : O \to \mathbb{R}^3$. (2)

(ii) Berechne das Kurvenintegral (3)

$$\int_0^{2\pi} \langle P(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t) \rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \langle P(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t) \rangle \,\mathrm{d}t$$

über das Vektorfeld P.

(iii) Zeige, dass M nicht orientierbar ist. (1)

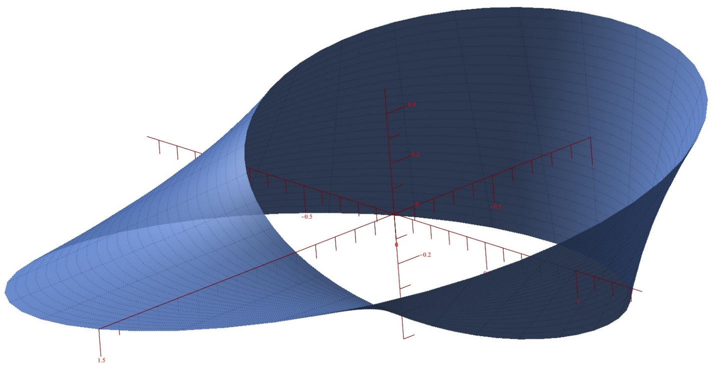

Abbildung 1: Das Möbiusband

22. Es sei in der Situation des klassischen Integralsatzes von Stokes das Gebiet G kompakt in U enthalten. Zeige mit der Friedrichschen Glättung den klassischen Integralsatz von Stokes, wenn für die Parametrisierung X lediglich $X \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ gilt. (5*)