Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:

12.01.16, 16 Uhr

H12

Dr. F. Stoffers A. Spener WS 15/16
20+7* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 06

23. Es sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{inx}$ eine formale Fourierreihe mit Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann Koeffizienten a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ und b_k $(k \in \mathbb{N})$ existieren, so dass gilt: (2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Gib eine Formel an, um aus den c_n die a_k, b_k zu bestimmen und umgekehrt.

24. Es seien $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Es bezeichne h die Faltung

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

(i) Zeige für alle $n \in \mathbb{Z}$: $2\pi\, c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$. (2)

(ii) Es sei f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1)
Zeige: $a_k(f) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Es sei f eine gerade Funktion, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1*)
Zeige: $b_k(f) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(iv) Es bezeichne $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ die Konjungiertkomplexe von f. (1*)
Zeige: $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(v) Es sei f reellwertig und eine gerade Funktion. (1)
Zeige: $c_n(f) \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

25. Es bezeichne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Fortsetzung von $[-\pi, \pi) \to \mathbb{C}, x \mapsto x$. (4)
Bestimme die Fourierkoeffizienten von f und untersuche die formale Fourierreihe auf Konvergenz.

Hinweis: Verwende das Dirichlet-Kriterium. Der Grenzwert der Reihe (falls in einem Sinne existent) ist nicht zu bestimmen.

26. Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Zeige, dass die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f konvergiert. (2)

27. Théorie analytique de la chaleur

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, also

$$\text{(WLG)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u & \text{für } t > 0, x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi, t) & \text{für } t > 0 \qquad \text{(Randbedingungen)} \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,\pi] \qquad \text{(Anfangswert).} \end{cases}$$

Eine Lösung u beschreibt die Verteilung der Anfangswärme f über die Zeit. Wir nehmen nun an, dass die Lösung folgende Struktur habe:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \text{ auf } [0,\pi] \times [0,\infty)$$

für zwei Funktionen $X \in \mathcal{C}^2([0,\pi];\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{C}^1([0,\infty);\mathbb{R})$ (Separationsansatz von Fourier).

(i) Zeige: Die beiden Funktionen X und T erfüllen dann (soweit definiert) die Gleichung $\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)}{T(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X(x)}{X(x)}$. Folgere, dass eine Kontante $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit (2*)

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)}{T(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X(x)}{X(x)} = -\lambda$$

(ii) Folgere nun, dass $\lambda > 0$ ist und schließe weiter, dass gilt (2*)

$$T(t) = Ae^{-\lambda t}, X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x) + C\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

für reelle Konstanten A, B und C. Verwende dazu die Randbedingungen und folgendes Ergebnis aus der Theorie der Differentialgleichungen:

Satz (Allgemeine Lösung homogener linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten):
Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ mit Konstanten $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Betrachte das zugehörige charakteristische Polynom $p(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ mit den beiden (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung gegeben als reelle Linearkombinationen der Funktionen f_1 und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei sich diese Funktionen wie folgt ergeben:

$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$	$f_1(x) = e^{x_1 \cdot x}, f_2(x) = x \cdot e^{x_1 \cdot x}$
$x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$	$f_1(x) = e^{x_1 \cdot x}, f_2(x) = e^{x_2 \cdot x}$
$x_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0,\ x_2 = \alpha - i\beta$	$f_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), f_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\cos\beta x)$

(iii) Verwende die Randbedingungen an u um zu zeigen, dass $C = 0$ und $\lambda = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist. (1*)

(iv) Zeige, dass sich eine Lösung des Problems (ohne Anfangswert) aufgrund der Linearität schreiben lässt als (4)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} B_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Verwende den Anfangswert $u(\cdot, 0) = f$ um zu folgern, dass die Koeffizienten B_n die Formel

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

erfüllen, sofern das Integral wohldefiniert ist.

(v) Es sei die ungerade und anschließend 2π-periodische Fortsetzung von f eine Funktion in $\mathcal{C}^4(\mathbb{R})$. Zeige, dass dann eine stetige Funktion $u\colon [0,\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ existiert, welche stetig differenzierbar in der Zeit $t \in (0,\infty)$ und zwei mal stetig differenzierbar im Ort $x \in (0,\pi)$ ist, so dass (WLG) erfüllt ist. (4)

Hinweis: Versuche, die Lösung als Grenzwert von Funktionen wie aus Teil (iv) zu schreiben und begründe, warum sich diese Grenzwertbildung mit der Differentiation vertauschen lässt.

Erholsame Feiertage und einen guten Rutsch ins Jahr 2016!