Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 08

Hinweis: Zum Bestehen der Vorleistung müssen insgesamt 75 Punkte erreicht werden.

32. Es seien $a < b \in \mathbb{R}$. Finde eine vollständige Orthonormalfolge auf $L^2([a,b])$. (2*)

33. Bestimme die Fouriertransformierte $\hat{f}_a$ für folgende Funkionen $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $a > 0$: (6)
Bemerkung: In beiden Fällen ist $f_a \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, da beide Funktionen nicht glatt sind, aber $\hat{f}_a$ ist dennoch wohldefiniert.

(i) $f_a : x \mapsto \chi_{[-a,a]}(x)$.

(ii) $f_a : x \mapsto e^{-a|x|}$.

34. Im Folgenden seien $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Drücke die Fouriertransformierten der Funktionen F_i durch $\hat{f}$ und $\hat{g}$ aus: (4)

(i) $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(ii) $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot e^{2\pi i x b}$, $b \in \mathbb{R}$.

(iii) $F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f * g)(x)$.

35. Wir betrachten die Gleichung

$$u(x) - u''(x) = e^{-|x|}, \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

für eine Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}(u) =: \hat{u}$ wohldefiniert ist. Verwende die Fouriertransformierte der Gleichung (1) um zu zeigen, dass gilt: (2*)

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+\xi^2} \right)^2 .$$

Hinweis: In **33.**(ii) wurde gezeigt: $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-|x|})(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}$.

(ii) Berechne $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$. (4*)
Hinweis: Zeige zunächst mit der Inversionsformel, dass $\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$ gilt (mit $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty$). Dies darf auch für die hier auftretenden Funktionen verwendet werden.

(iii) Überprüfe, inwiefern $u := \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$ eine Lösung von (1) darstellt. Welche Regularität besitzt u? (4*)
Hinweis: Es ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|-|y|}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} (1-x)e^{x} & x \le 0, \\ (1+x)e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$