Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
23.05.16, 14 Uhr
N24/104

James Kennedy
Adrian Spener
Sommer 2016

18 Punkte

Elemente der Variationsrechnung — Blatt 02

7. Sei X ein Vektorraum. $M \subset X$ heißt **konvex**, wenn für jedes $x, y \in M$ und $\vartheta \in (0,1)$ gilt:

$$\vartheta x + (1-\vartheta)y \in M.$$

Sei $M \subset X$ konvex. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für jedes $x, y \in M$, $x \neq y$, und $\vartheta \in (0,1)$ gilt:

$$f(\vartheta x + (1-\vartheta)y) \leq \vartheta f(x) + (1-\vartheta) f(y).$$

(a) Zeige: Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung Df, dann sind die folgende Aussagen äquivalent: (3)

(i) f ist konvex,

(ii) für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x)$,

(iii) für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $\langle Df(x) - Df(y), x - y\rangle \geq 0$.

(b) Zeige: Ist $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, so ist äquivalent: (2)

(i) f ist konvex,

(ii) die Hessematrix $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) Zeige oder widerlege: (4)

(i) Ist $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Raum, so ist $||\cdot||_X$ konvex.

(ii) Sind $M \subset X$, $f : M \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, dann ist es auch $g \circ f : M \to \mathbb{R}$.

(iii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp x$ ist konvex.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ist konvex.

8. Minimiere, sofern möglich, folgende Funktionale J für $u \in X$:

(i) $J(u) = \int_a^b u'(x)\,\mathrm{d}x,\ \ X = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]) \,|\, u(a) = 5, u(b) = 47\}$. (1)

(ii) $J(u) = \int_0^1 x\,u'(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x,\ \ X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, u(0) = u(1) = 0\}$. (1)

(iii) $J(u) = -\int_0^1 x\,u'(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x,\ \ X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, u(0) = u(1) = 0\}$. (2)

(iv) $J(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 + u(x)^2\,\mathrm{d}x,\ \ X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, u(0) = 0, u(1) = c\}$. (3)

— bitte wenden —

9. Sei $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $m > 0$ konstant und $I = [a, b]$ ein Intervall. Ferner sei für $u \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^3)$ das Funktional J definiert durch (2)

$$J(u) = \int_I \left(\frac{m}{2} \left| u'(x) \right|^2 - V(u(x)) \right) \mathrm{d}x.$$

(i) Formuliere die Euler-Lagrange-Gleichungen für $u \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R}^3)$.

(ii) Zeige, dass für eine Lösung u der Euler-Lagrange-Gleichungen die Gesamtenergie $E(u, \dot{u}) = \frac{m}{2} \left| \dot{u} \right|^2 + V(u)$ konstant ist.