Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
30.05.16, 14 Uhr
N24/104

James Kennedy
Adrian Spener
Sommer 2016

16 Punkte

Elemente der Variationsrechnung

Blatt 04

10. In dieser Aufgabe möchten wir charakterisieren, welche Funktionen $u \in \mathcal{C}^1[-1,1]$ mit fester Länge $\pi \geq L > 2$ und $u(-1) = u(1) = 0$ die Fläche $\int_{-1}^{1} u(x)\,\mathrm{d}x$ **maximieren**.

(i) Formuliere das zugehörige Variationsproblem. (1)

(ii) Setze voraus, dass eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2[-1,1]$ existiert. Zeige, dass reelle Konstanten α, λ existieren, so dass u auf $(-1,1)$ die Gleichung (2)

$$\frac{\lambda u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} = x + \alpha$$

erfüllt.

(iii) Zeige, dass ein $\beta \in \mathbb{R}$ existiert mit (2)

$$(x+\alpha)^2 + (u(x)+\beta)^2 = \lambda^2.$$

(iv) Zeige, dass $\alpha = 0$ ist und λ die Gleichung (2)

$$\sin \frac{L}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

erfüllt. Rate für $L = \pi$ eine Lösung dieser Gleichung. Was ist dann β?

11. Es sei $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R})$ ein Minimierer des Funktionals $D(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x$ unter den Nebenbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ und $||u||_2 = \left(\int_0^1 (u(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = 1$. Zeige, dass die Zahl $-\lambda = -D(\tilde{u})$ ein Eigenwert des Dirichletproblems ist, das heißt zu λ gibt es eine Funktion $v \in \mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R})$ mit (3)

$$\begin{cases} v'' - \lambda v = 0 & \text{in } (0,1), \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

— bitte wenden —

12. Wir möchten Satz 2.6.5 im Fall $n = m = 1$ zeigen. Es sei dazu $I = (a, b)$ ein Intervall und $\lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(I; \mathbb{R})$ mit zulässiger Parametertransformation $\{\xi(\cdot, \varepsilon)\}$. Sei ferner $F = F(x, z, p) \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ und

$$J(u) = \int_I F(x, u, u'(x))\,\mathrm{d}x$$

für $u \in \mathcal{C}^1(\overline{I}; \mathbb{R})$. Zeige:

(i) Für die Umkehrfunktion $y \mapsto \eta(y, \varepsilon)$ von ξ gilt: (3)

- (a) $\eta(y, \varepsilon) = y - \varepsilon\lambda(y) + o(\varepsilon)$.
- (b) $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\eta(y, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -\lambda(y)$.
- (c) $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\xi(\eta(y, \varepsilon), \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \lambda'(y)$.
- (d) $\frac{\partial}{\partial x}\xi(\eta(y, 0) = 1$.
- (e) $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\eta(y, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -\lambda'(y)$.

(ii) Für $u \in \mathcal{C}^1(\overline{I}; \mathbb{R})$ ist (3)

$$\partial J(u)(\lambda) = \int_I \frac{\partial}{\partial p}F(y, u(y), u'(y))u'(y)\lambda'(y) - \lambda(y)\frac{\partial}{\partial x}F(y, u(y), u'(y)) \\ - F(y, u(y), u'(y))\lambda'(y)\,\mathrm{d}y$$

Hinweis: Substituiere die Umkehrfunktion.