James Kennedy
Adrian Spener
Sommer 2016

14+4* Punkte

Elemente der Variationsrechnung

Blatt 06

18. Sei $\Omega = B_1(0) = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ und (4)

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha, & x \neq 0 \\ \beta, & x = 0. \end{cases}$$

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Für welche Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $f \in W^{1,p}(\Omega)$? Berechne im Falle der Existenz die schwache Ableitung von f.

19. (i) Sei $I = [a,b]$, $a < b$ reelle Zahlen, $1 < p \leq \infty$ und $g \in L^p(I)$. Zeige, dass die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, (4)

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

wohldefiniert und in $W^{1,p}(I)$ ist und berechne außerdem ihre schwache Ableitung.

(ii) Führe das Gleiche im Fall $p = 1$ durch. (2*)

20. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeige, dass die Abbildung φ_v, definiert durch (2)

$$\varphi_v(f) := \int_\Omega v f\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution ist.

21. (i) Zeige, dass eine Funktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ existiert mit (2*)

(a) $\eta \geq 0$,

(b) $\int_{\mathbb{R}} \eta\,\mathrm{d}x = 1$,

(c) $\eta(x) = 0$ für alle $|x| > 1$.

Hinweis: Transformiere die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

(ii) Es sei $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Zu $\eta_\varepsilon \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ können wir nach Aufgabe **20.** eine Distribution $\varphi_{\eta_\varepsilon}$ assoziieren. Zeige (3)

$$\varphi_{\eta_\varepsilon} \to \delta_0 \;\; (\varepsilon \searrow 0) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

also $\varphi_{\eta_\varepsilon}(f) \to \delta_0(f)$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.