Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:

11.07.16, 14 Uhr

N24/104

James Kennedy Adrian Spener Sommer 2016
10+11* Punkte

Elemente der Variationsrechnung

Blatt 07

Hinweis: Bitte vergesst nicht, euch für die Vorleistung anzumelden. Zum Bestehen der Vorleistung sind 50 Punkte hinreichend.

22. Es sei $I = [0,1]$, $1 < p < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ und

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 \left|u'(x)\right|^p \,\mathrm{d}x$$

für $u \in \mathbb{X} := \{u \in W^{1,p}(I;\mathbb{R}) \,\big|\, u(0) = \alpha, u(1) = \beta, ||u||_{L^2} = \gamma\}$.

(i) Prüfe, dass $\mathbb{X}$ und $\mathcal{J}$ wohldefiniert sind. Zeige weiter, dass für eine Minimalfolge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{J}$ in X eine schwach in $W^{1,p}$ gegen ein $u \in W^{1,p}$ konvergente Teilfolge existiert. (3)

(ii) Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli, um die gleichmäßige Konvergenz einer Teilfolge obiger Teilfolge von u_n gegen u für die stetigen Repräsentanten zu zeigen. Folgere, dass der Grenzwert u in $\mathbb{X}$ liegt. (3)

(iii) Zeige, dass u das Funktional $\mathcal{J}$ auf tatsächlich minimiert. (2)

23. Die variationelle Formulierung des Dirichlet-Problems
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$. Definiere den Raum

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{\{\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \,\big|\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}), \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}} \subset W^{1,2}(\Omega),$$

wobei der Abschluss bezüglich der $W^{1,2}$-Norm gebildet wird.
Hinweis: Als abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes $W^{1,2}(\Omega)$ ist $W_0^{1,2}(\Omega)$ natürlich wieder ein Hilbertraum bezüglich des selben Skalarproduktes und somit reflexiv.
Sei weiter das Funktional $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$J(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \,\mathrm{d}x.$$

(i) Zeige, dass J wohldefiniert ist. (1)

(ii) Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung für ein Minimum von J auf $\mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega})$? (2)

(iii) Zeige, dass J auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ koerziv ist. (2)
Hinweis: Es gibt eine Konstante $C = C(\Omega)$, so dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die *Poincaré-Ungleichung* gilt:

$$\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Somit ist die $W^{1,2}$-Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ äquivalent zur Norm $||\cdot||_{W_0^{1,2}} : u \mapsto ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$. Es genügt also zu zeigen, dass Zahlen $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $J(u) \ge \alpha\, ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + \beta$ ist für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Verwende dazu die Young'sche Ungleichung.

(iv) Zeige, dass J auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ schwach unterhalbstetig ist und folgere die Existenz eines Minimierers von J in $W_0^{1,2}(\Omega)$. (2)

24. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auf $q > 1$ in der Voraussetzung $(H2)$ (Koerzivität) aus Satz 3.6.3. im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.
Sei dazu $I = [0,1]$ und $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, z, p) \mapsto \sqrt{z^2 + p^2}$. Betrachte das Funktional

$$J(u) = \int_I F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x,$$

welches auf $X := \{u \in W^{1,1}(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I; \mathbb{R}) \mid u(0) = 0, u(1) = 1\}$ minimiert werden soll.

(i) Zeige, dass die Voraussetzungen $(H1), (H2), (H3)$ von Satz 3.7.1. für $q = 1$ erfüllt sind. Zeige weiter, dass $(H2)$ für $q > 1$ nicht gilt. (3)

(ii) Zeige, dass $\inf_X J = 1$ gilt. **Hinweis:** Gebe für die Ungleichung $\inf_X J \leq 1$ eine passende Funktionenfolge (u_n) in X an, für die $J(u_n)$ gegen 1 konvergiert (vergleiche Aufgabe 1). (2)

(iii) Zeige, dass kein Minimierer von J auf X existiert. (1)

Erfolgreiche Semesterferien!