James Kennedy
Adrian Spener
Summer term 16

Nonlinear Partial Differential Equations
Sheet 03

9. (i) Zeige: Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung Df, dann sind die folgende Aussagen äquivalent: $(2i)$

(a) f ist konvex,

(b) für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y - x)$,

(c) für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $\langle Df(x) - Df(y), x - y\rangle \geq 0$.

(ii) Zeige: Ist $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, so ist äquivalent: (i)

(a) f ist konvex,

(b) die Hessematrix $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

10. (i) Es sei V ein normierter Raum und $M \subset V$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach abgeschlossen. $(2i)$

Hinweis: Trennungssatz von Hahn-Banach.

(ii) Es sei V ein normierter Raum und $x_n \in V$ eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in V$. Dann gibt es eine Folge y_n von (endlichen) Konvexkombinationen von $\{x_1, x_2, \ldots\}$ so dass y_n in Norm gegen x konvergiert. (i)

(iii) Es sei V ein normierter Raum und $\mathcal{E}\colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und Norm-unterhalbstetig. Zeige, dass $\mathcal{E}$ dann auch schwach unterhalbstetig ist. (i)

11. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Sei weiter $g = \operatorname{tr}(v) \in L^2(\partial\Omega)$ für ein $v \in H^1(\Omega)$. Zeige, dass höchstens ein Minimierer von $(3i)$

$$\mathcal{E}(w) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Dw|^2}\, \mathrm{d}x,$$

in $\{w \in H^1(\Omega) \,\big|\, w|_{\partial\Omega} = g\}$ existiert. Was lässt sich mit den Methoden aus der Vorlesung über die Existenz sagen?

12. Zeige oder widerlege: Ist V ein reflexiver Banachraum und $J \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, dann ist $(4i)$

$$\mathcal{N} := \{x \in V \,\big|\, J(x) = 0\}$$

schwach abgeschlossen.

— bitte wenden —

13. Das duale Variationsprinzip: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $f \in L^2(\Omega)$. Zeige (3*i*)

$$\min_{w \in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 - fw \, \mathrm{d}x = \max_{\xi \in \mathcal{A}} -\frac{1}{2} \int_\Omega |\xi|^2 \, \mathrm{d}x,$$

wobei $\mathcal{A} := \{\xi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)) \mid \operatorname{div} \xi = f \text{ distributionell}\}$.

14. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $2 < p < \frac{2d}{d-2}$. Wir betrachten für $\lambda \in \mathbb{R}$ das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

(i) Es sei zunächst $\lambda \geq 0$. Zeige, dass ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $u \in H_0^1(\Omega)$ existiert, so dass gilt: (3*i*)

$$\int_\Omega Du \cdot D\varphi + \lambda u \varphi \, \mathrm{d}x = \mu \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi \, \mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Hinweis: Lagrange-Multiplikator.

(ii) Zeige, dass dies sogar für $\lambda > -\lambda_1$ möglich ist, wobei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert von (*i*)

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{\lambda} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ist.

(iii) Zeige, dass für $\lambda > -\lambda_1$ eine nichttriviale, nichtnegative schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (1) existiert. (2*i*)