Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 04

16. (i) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) Für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. (1)

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist (3)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(ii) Berechne:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. (1)

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$. (2)

17. Berechne für $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. (1)

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^k 4^{-k+1}$. (2)

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j}$. (2)

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$. (2)

18. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Zeige, dass gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (3)
Hinweis: Betrachte den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ und verwende die Bernoullische Ungleichung.

19. Wir sagen, dass zwei Mengen A, B *gleichmächtig* sind, falls eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ existiert.

(i) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeige: Die Intervalle $[0, 1]$ und $[a, b]$ sind gleichmächtig. (2)

(ii) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $c < d$. Zeige: Die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ sind gleichmächtig. (1)

(iii) Zeige oder widerlege: Die Intervalle $[0, 1]$ und $(0, 1)$ sind gleichmächtig. (4*)