Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 05

20. Bestimme, falls existent, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge (2)

$$M = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

21. Untersuche die angegeben Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \left(2 + \frac{3}{n}\right)^4.$ (2)

(ii) $a_n = \frac{4n+1}{n} - \frac{2n}{2+n} + \frac{5-6n^2}{3(n+1)(n+4)}.$ (2)

(iii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$ (2)

(iv) $a_n = \frac{-n^2}{n+1}.$ (2)

(v) $a_n = \sqrt{n^2+5n} - n.$ (2)

22. Bestimme den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2}{n^2+2n+2}$, und bestimme zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. (3)

23. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ bzw. $b \in \mathbb{R}$ konvergieren. Es sei $b \neq 0$. Zeige:

(i) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Insbesondere ist also $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. (2)

(ii) Es sei für $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ die Folge (c_n) definiert durch $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Zeige, dass gilt: (2)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}.$$

24. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. (2)

25. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge. Zeige, dass gilt: (4^*)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$