Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 07

32. Stelle die folgenden komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ als $z = a + ib$ dar (mit a und b reellwertig) und bestimme $|z|$.

(i) $\frac{3+i}{2-i}$. (1)

(ii) i^{2016}. (1)

(iii) $\dfrac{1}{\frac{1}{1+i} - 1}$. (1)

33. Skizziere folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3, -1 \leq \operatorname{Im} z < 2\}$. (1)

(ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |1 + z|\}$. (1)

(iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 2i| \leq |z + 2|\}$. (2)

34. Bestimme alle Häufungspunkte und gegebenenfalls den Grenzwert folgender komplexwertiger Zahlenfolgen:

(i) $a_n = \dfrac{(2n+4)i + 3n^3}{3n^2(n+5i)i} + \dfrac{n!}{n^n}(7+3i)^{42} + i\dfrac{2n^2}{(2n+i)n}$. (2)

(ii) $a_n = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$. (2)

35. Wir beweisen einen Teil von **Bemerkung 5.5.3**: (2)
Zeige, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge komplexer Zahlen eindeutig ist.

36. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, und es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Zeige, dass dann auch das Konjungiertkomplexe $\bar{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P ist. (2)

37. Es sei $w = x + iy \in \mathbb{C}$. Finde alle Lösungen $z = a + ib \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = w$. (4)

38. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (reelle oder komplexe) Folge mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Zahl $0 \leq L < 1$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq L|a_{n+1} - a_n|.$$

(i) Zeige, dass gilt: $|a_{n+1} - a_n| \leq L^{n-1}|a_2 - a_1|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1)

(ii) Beweise, dass die Folge a_n konvergiert. (4*)

Hinweis: Cauchy-Kriterium.