Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
26.01.17, 14 Uhr
H22

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
WS 16/17

17+6* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Blatt 12

55. Bestimme alle Stellen $a \in D$, an denen folgende Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(\pi + \sin^2(\cos(x)) - \cos(\log(x^2+1)))$. (1)

(ii) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^x, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ (2)

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-x^2-2x}{x^2-4}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}, \\ \frac{3}{2}, & x = 2, \\ \pi, & x = -2. \end{cases}$ (2)

Für Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ definieren wir das Maximum $\max\{f,g\}\colon D \to \mathbb{R}$ punktweise durch

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

56. Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass $\max\{f,g\}\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ist. (2)

57. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und es gebe ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$. Zeige, dass die Menge (2)

$$N = \{t \in [a,b] \colon f(t) = 0\}$$

ein Minimum besitzt.

58. Zeige, dass genau ein $x > 0$ existiert mit $e^x + 2\log x = 7$. (2)

59. Es sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt. (3)
Hinweis: Zwischenwertsatz.

60. Sind folgende Funktionen $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. (2)

(ii) $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$. (3*)

61. Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$

Zeige:

(i) Ist $x_0 > 0$ mit $x_0 \in \mathbb{Q}$, so ist f nicht stetig in x_0. (1)

(ii) Ist $x_0 > 0$ mit $x_0 \notin \mathbb{Q}$, so ist f stetig in x_0. (3*)