Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
10.05.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 03

11. Der allgemeine Binomialkoeffizient ist für $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Man kann leicht zeigen, dass gilt: $(k+1)\binom{\alpha}{k+1} = (\alpha - k)\binom{\alpha}{k}$.

(i) Es sei $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Berechne die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. (1*)

(ii) Es sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Zeige, dass die Funktionenreihe (2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

auf $(-1,1)$ punktweise gegen eine Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wo ist diese Konvergenz gleichmäßig?

(iii) Zeige, dass f differenzierbar ist und für die Ableitung von f gilt: (1)

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x), \qquad x \in (-1,1).$$

(iv) Zeige: Es gilt $f(x) = (1+x)^\alpha$ für alle $x \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (1*)
Beachte: Bei Potenzreihen gilt die Konvention $x^0 = 1$ für $x = 0$.

12. (i) Es seien (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$ metrische Räume. Es bezeichne (1)

$$X := \bigtimes_{i=1}^{n} X_i = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in X_i\}$$

den Produktraum der X_i. Für Elemente $x, y \in X$ sei $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$. Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(ii) Es sei Ω eine Menge und $X = \Omega^n$. Auf X definieren wir für Elemente $x, y \in X$ deren *Hamming-Abstand* $\delta(x,y)$ als die Anzahl der Stellen, an denen sich x und y unterscheiden, also $\delta(x,y) = \#\{k \in \{1, \ldots, n\} \,|\, x_k \neq y_k\}$. (1)
Zeige, dass (X, δ) ein metrischer Raum ist.

— bitte wenden —

13. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Es seien $A_1, \ldots, A_n \subset X$ abgeschlossen. Zeige: $A := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ist abgeschlossen. (1)

(ii) Es sei $x \in X$. Zeige, dass $\{x\}$ abgeschlossen ist. (1)

(iii) Folgere, dass endliche Mengen abgeschlossen sind. (1)

(iv) Zeige oder widerlege, dass für $A_k \subset X$ abgeschlossen, $k \in \mathbb{N}$, auch die Vereinigung $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ abgeschlossen ist. (1)

14. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Es sei $M \subset X$. Zeige, dass gilt: $M^\circ = \bigcup_{O \subset M,\, O \text{ offen}} O$. Das Innere von M ist also die (bezüglich der Inklusion) größte offene Teilmenge von M. (2*)

(ii) Es seien $M, N \subset X$. Zeige:

(a) $M \subset N \Rightarrow M^\circ \subset N^\circ$. (1)

(b) $(M \cap N)^\circ = (M^\circ \cap N^\circ)$. (1)

(c) $(M \cup N)^\circ \supset (M^\circ \cup N^\circ)$, und im Allgemeinen herrscht keine Gleichheit. (1)

15. Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Für stetige Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

(i) Zeige, dass $\big(\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ ein normierter Raum ist. (3)

(ii) Zeige oder widerlege:

(a) Es gibt ein $C > 0$ mit $\|f\|_1 \leq C\|f\|_\infty$ für alle $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$. (1)

(b) Es gibt ein $\tilde{C} > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq \tilde{C}\|f\|_1$ für alle $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$. (1)

16. Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Skizziere folgende Punktmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ und bestimme jeweils das Innere M°, den Rand ∂M und den Abschluss $\overline{M}$. Entscheide, ob M offen ist, und ob M abgeschlossen ist. Ausnahmsweise müssen die Aussagen **nicht** bewiesen werden.

(i) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x - 2y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. (1)

(ii) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq z^2\} \subset \mathbb{R}^3$. (1)

(iii) $M = \mathbb{Q} \cap \big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}]\big) \subset \mathbb{R}^1$. (1)