Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 04

17. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeige: A ist offen genau dann, wenn gilt: $A^\circ = A$. (2)

18. Es sei X eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ die triviale Metrik, d.h. $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

(i) Zeige, dass eine Folge $x_n \in X$ genau dann gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, falls ein $N > 0$ existiert mit $x_n = x$ für alle $n \geq N$. (1)

(ii) Ist (X, d) vollständig? (1)

19. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige:

(i) Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. (1)

(ii) Konvergiert eine Folge aus X gegen ein $x \in X$, so konvergiert jede Teilfolge ebenfalls gegen x. (1)

(iii) Ist $x_n \in X$ eine Folge, dann konvergiert x_n gegen $x \in X$ genau dann, wenn jede Teilfolge von (x_n) eine Teifolge besitzt, die gegen x konvergiert. (2)

(iv) Die Aussage aus Teil (iii) wird falsch, wenn die Teilfolgen der Teilfolgen nicht gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. (1^*)

(v) Jede konvergente Folge ist beschränkt. (1)

(vi) Jede Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, konvergiert. (1)

20. Es sei $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ und für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ die p-Norm definiert durch

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{i=1,\dots,d} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

(i) Für welche $1 \leq p \leq \infty$ ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ein Hilbertraum? (3)
Hinweis: Verwende die Parallelogrammgleichung aus Aufg. 56, Blatt 13 aus *Lineare Algebra I.*

(ii) Zeige: $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$ punktweise auf $\mathbb{R}^d$ für $p \to \infty$. (2)

(iii) Zeige, dass $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^d$ nicht gleichmäßig konvergiert für $p \to \infty$. (3^*)

21. (i) Es sei $\mathcal{C}^1([-1,1])$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[-1,1]$. Zeige, dass $(\mathcal{C}^1([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ kein Banachraum ist. (3)

(ii) Es bezeichne für $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ $\|f\|_{\mathcal{C}^1}$ die Norm $\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Zeige, dass $(\mathcal{C}^1([a,b]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ ein Banachraum ist. (2)