Universität Ulm
Abgabe und Besprechung:
**31.05.17, 16 Uhr**
**H3**

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

$20 + 4^*$ Punkte

# Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 06

**26.** (i) Ist $F\colon (\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $F(f) = \int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x$ eine lineare Abbildung? (1)

(ii) Ist $F$ stetig? (2)

(iii) Ist $F$ gleichmäßig stetig? ($2^*$)

**27.** Untersuche, ob für die folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ jeweils $\min_{x\in M} f(x)$ und $\max_{x\in M} f(x)$ existieren.

(i) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\} \subset \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = e^{yz} - x\cos(y^2)$. (2)

(ii) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \ge 4\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. (2)

(iii) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x$. (2)

**28.** Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$.

(i) Zeige: $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ist genau dann kompakt, wenn $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ kompakt sind. (3)

(ii) Zeige: Es gibt eine nicht-kompakte Menge $C \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Bilder der beiden Projektionen $\Pi_1(C) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in C\}$ und $\Pi_2(C) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in C\}$ beide kompakt sind. ($2^*$)

**29.** Es sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, $a \in X, a_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$ sowie $a_n \neq a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Zeige: $A$ ist nicht kompakt, aber $\tilde{A} = A \cup \{a\}$ ist kompakt. (3)

**30.** Zeige: Ist $(X,d)$ ein metrischer Raum, $B \subset X$ kompakt und $A \subset B$, $A$ abgeschlossen, dann ist $A \subset X$ kompakt. (2)

**31.** Es seien $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ metrische Räume, $(X, d_X)$ kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Zeige, dass dann $f$ gleichmäßig stetig ist. (3)