Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
19.07.17, 16 Uhr
H3

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
A. Spener
SoSe 17

22* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 13

Hinweis: Zum Bestehen der Vorleistung sind 115 Punkte hinreichend. Vegesst nicht, euch rechtzeitig im Hochschuldiensteportal für die Vorleistung und die Klausur anzumelden.
Am Freitag, den 21.7. fällt die Vorlesung aus.

64. Es seien $\gamma_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_1(t) = (2\cos(t) - 1, 2\sin(t))^T,$$

$\gamma_2\colon [0, \frac{7}{4}\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_2(t) = e^{-t}(\cos(t), \sin(t))^T$$

sowie $\gamma_3\colon [0, \frac{15}{4}\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \le t \le 2\pi, \\ \gamma_2(t-2\pi) & 2\pi < t \le \frac{15}{4}\pi. \end{cases}$$

(i) Skizziere γ_1, γ_2 und γ_3. (1*)

(ii) Entscheide für γ_i, $i = 1,2,3$:

(a) Ist γ_i ein geschlossener Jordanscher Weg? (1*)

(b) Ist γ_i eine $\mathcal{C}^1$- oder stückweise $\mathcal{C}^1$-parametrisierte Kurve? (1*)

(iii) Bestimme die Längen $L(\gamma_i)$ aller rektifizierbaren γ_i. (2*)

(iv) Bestimme eine orientierungsumkehrende $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ von γ_1. (1*)

Erinnerung: Eine $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung $\varphi\colon I_2 \to I_1$ heißt *orientierungserhaltend*, falls $\varphi'(t) > 0$ ist für alle $t \in I_2$, und *orientierungsumkehrend*, falls $\varphi'(t) < 0$ ist für alle $t \in I_2$.

(v) Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (y,x)^T$. Bestimme das Kurvenintegral von F längs γ_i, $i = 1,2,3$. (2*)

65. Es sei $\gamma_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-parametrisierte Kurve und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Umparametrisierung von γ_1. Zeige: $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$. (3*)

— bitte wenden —

66. Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y,x)^T$.

(i) Bestimme die Kurvenintegrale $\int_\gamma F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ bezüglich folgender Kurven γ_i:

(a) $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $0 \le t \le \pi$. (1*)

(b) $\gamma_2(t) = (\cos t, -\sin t)^T$, $0 \le t \le \pi$. (1*)

(c) $\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$. (1*)

(d) $\gamma_4(t) = \begin{cases} (1-t, t)^T, & 0 \le t \le 1, \\ (1-t, 2-t)^T, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$ (2*)

(ii) Bestimme $\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y)$. Ist F ein Gradientenfeld? (2*)

(iii) Bestimme, sofern möglich, für jedes $i = 1, \ldots, 4$ ein offenes $U_i \subset \mathbb{R}^2$, das die Spur von γ_i enthält (also $\gamma_i(I_i) \subset U_i$), so dass $F_{|U_i}\colon U_i \to \mathbb{R}^2$ ein Gradientenfeld ist. (2*)

67. Entscheide, ob folgende Funktionen Gradientenfelder sind:

(i) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (e^y, xe^y, 1)^T$. (1*)

(ii) $F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y)\colon y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (-\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{1}{x})^T$. (1*)