Funktionalanalysis

Delio Mugnolo

Institut für Analysis, Universität Ulm

Wintersemester 2011/12

Metrische Räume

Immer: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$X, Y, \ldots$ Vektorräume über $\mathbb{K}$

Definition.
Ein Abstand d auf X ist

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$$

s.d.

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$, *und*
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

$\forall x, y, z \in X$.

(X, d) heißt dann metrischer Raum.

Diskreter Abstand

Beispiel.

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \neq y, \\ 0 & \textit{falls } x = y, \end{cases}$$

$(x, y \in X)$
definiert einen Abstand auf X ("diskreter Abstand").

$\Rightarrow$ *Jede nichtleere Menge ist metrisierbar.*

$C[0,1]$ als metrischer Raum

Beispiel.

$$d(f,g) := \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$(f, g \in C[0,1])$
definiert einen Abstand auf $C[0,1]$.

$C^\infty[0,1]$ als metrischer Raum

Beispiel.

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)|}{\max_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| + 1}$$

($f, g \in C^\infty[0,1]$)
definiert einen Abstand auf $C^\infty[0,1]$.

Definition.

(X,d) *Vektorraum*, $x \in X$, $A \subset X$.

(1) x *heißt innerer Punkt von* A, *oder* A *heißt Umgebung von* x, *falls* $\exists r > 0$ *s.d.*

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) \le r\} \subset A.$$

(2) A *heißt offen, falls jedes* $x \in A$ *ein innerer Punkt ist.*

(3) A *heißt abgeschlossen, falls* $X \setminus A$ *offen ist.*

Definition.

$(X, d_1), (Y, d_2)$ *metrische Räume,* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$, $x \in X$.

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *konvergiert gegen* x *bzw.* x *ist Grenzwert von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bzw.* $\lim x_n = x$ *bzw.* $x_n \to x$, *falls*

$$\lim d(x_n, x) = 0.$$

(2) f *heißt stetig in* x, *falls*

$$\lim x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = f(x).$$

(3) f *heißt stetig, falls* f *überall stetig ist.*

(Wie im Fall $X = Y = \mathbb{K}$ kann Stetigkeit durch das $\epsilon - \delta$-Kriterium charakterisiert werden).

Erste Eigenschaften

- Vereinigung *beliebig* vieler offenen Mengen ist offen
- Durchschnitt *endlich* vieler offenen Mengen ist offen

Weil

$$\bigcup (A_n^C) = \left(\bigcap A_n\right)^C \quad \text{und} \quad \bigcap (A_n^C) = \left(\bigcup A_n\right)^C$$

gilt auch:

- Durschnitt *beliebig* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen
- Vereinigung *endlich* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

Stetigkeit

$(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume

Lemma.

(1) *$f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn*

$$B \text{ Umgebung von } f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B) \text{ Umgebung von } x.$$

(2) *$f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn*

$$B \text{ offen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B) \text{ offen in } X.$$

(3) *$f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn*

$$C \text{ abgeschlossen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(C) \text{ abgeschlossen in } X.$$

(X, d) metrischer Raum

Definition.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *heißt* *Cauchy-Folge* *falls*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } d(x_n, x_m) < \epsilon\ \forall n, m > N.$$

Lemma.

Eine Cauchy-Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge enthält.

Beispiel.

Nur schließlich konstante Folgen sind Cauchy bzgl. des diskreten Abstands.

Definition.

(X, d) *heißt* *vollständig*, *falls jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Dichte Teilmengen

Definition.

(X, d) *metrischer Raum*, $A \subset X$

(1) *Die Menge* $\overline{A}$ *aller Grenzwerte von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *heißt* *Abschluss* *von* A. *(äquiv.:* $\overline{A}$ *ist die kleinste abgeschlossene Menge, die* A *enthält).*

(2) *Die Menge* $\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^C}$ *heißt* *Rand* *von* A.

(3) A *heißt* *dicht in* X, *falls* $\overline{A} = X$. *(äquiv.:* A *ist dicht in* X, *falls*

$$\forall x \in X \; \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ s.d. } x = \lim x_n$$

d.h., falls

$$\forall x \in X \; \forall \epsilon > 0 \; \exists y \in A \text{ s.d. } d(x, y) < \epsilon).$$

Normierte Räume

Definition.

Eine ***Norm*** $\|\cdot\|$ ***auf*** X *ist* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ *s.d.*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}$

$(X, \|\cdot\|)$ *heißt dann* ***normierter Raum***.

- Jede Norm definiert einen Abstand durch

$$d(x,y) := \|x-y\|,$$

also ist jeder normierte Raum ein metrischer Raum.

- Nicht jeder metrische Raum ist normiert.
Z.B. kommt die diskrete Metrik nicht aus einer Norm (außer, wenn $X = \{0\}$), **denn sonst**

$$2\|x\| = \|2x\| = d(2x,0) = 1 = d(x,0) = \|x\| \quad \forall x \neq 0,$$

also $1 = 0$. ↯

Beschränktheit

$(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum

Definition.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt **beschränkt***, falls $\exists M > 0$ s.d.*

$$\|x_n\| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definition.

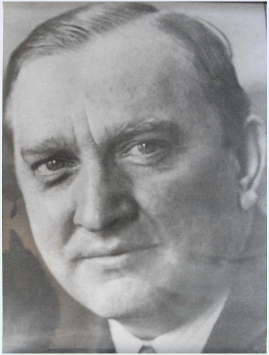
Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\!|\cdot|\!\|$ auf X heißen äquivalent, falls $\exists c > 0$ s.d.

$$c\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq \frac{1}{c}\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

(Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft sind invariant unter Normenäquivalenz.)

Banachräume

Definition.
Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.



Stefan Banach (1892–1945)

Euklidische Norm

Beispiel.

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

definiert eine Norm (und somit einen Abstand) auf $\mathbb{C}^n$ ("Euklidische Norm").

Allgemeiner: ℓ^p-Norme

I abzählbare Menge

Beispiel.

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k\in I} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert für alle $p \in [1,\infty)$ eine Norm auf

$$\ell^p(I) := \{x = (x_k)_{k\in I} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p < \infty\}$$

("ℓ^p-Norm").

(Üblich: $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$)

Beispiel.

Die Vektorräume

$$c_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \lim x_n = 0\},$$

$$c := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{konvergiert}\}$$

und

$$\ell^\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sup |x_n| < \infty\}$$

sind normierte Räume bzgl.

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Abgeschlossene vollständige Unterräume

X Banachraum

Lemma.
Ein Unterraum von X ist genau dann selber ein Banachraum (für die induzierte Norm), wenn er in X abgeschlossen ist.

Vollständige normierte Räume

Lemma.
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente X-wertige Reihe konvergiert, d.h., wenn $\exists \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\| \Rightarrow \exists \lim_n \sum_{k=1}^n x_k$.

Beweis.
"$\Rightarrow$" $\|\sum_{k=n+1}^m x_k\| \le \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|$.
"$\Leftarrow$"

- Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ Cauchy-Folge und betrachte eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < 2^{-k}$ $\forall k$.
- $\sum_{k=1}^\infty (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = \lim_m (y_{n_{m+1}} - y_{n_1})$ existiert (da $\sum_{k=1}^\infty \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \infty$), etwa $\sum_{k=1}^\infty (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = x$.
- Somit $x + y_{n_1} = \lim_m y_{n_{m+1}} = \lim_n y_n$.

$\square$

Vollständige normierte Räume

Lemma.

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente X-wertige Reihe konvergiert, d.h., wenn $\exists \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\| \Rightarrow \exists \lim_n \sum_{k=1}^n x_k$.

Beweis.

"$\Rightarrow$" $\|\sum_{k=n+1}^m x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|$.
"$\Leftarrow$"

- Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ Cauchy-Folge und betrachte eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < 2^{-k}$ $\forall k$.
- $\sum_{k=1}^\infty (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = \lim_m (y_{n_{m+1}} - y_{n_1})$ existiert (da $\sum_{k=1}^\infty \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \infty$) , etwa $\sum_{k=1}^\infty (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = x$.
- Somit $x + y_{n_1} = \lim_m y_{n_{m+1}} = \lim_n y_n$.

$\square$

$A \neq \emptyset$

Beispiel.

$$B(A) := \{f : A \to \mathbb{K} : \|f\|_\infty < \infty\}$$

ist ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

- $B(A)$ *normierter Raum: klar.*
- $B(A)$ *vollständig: Es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(A)$ *absolut konvergent, so ist*

$$(*) \qquad |\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} \|f\|_\infty$$

$\forall n < m$, $\forall x \in A$. *Also konvergiert* $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ *in* $\mathbb{K}$ $\forall x \in A$ *(da* $\mathbb{K}$ *vollständig) und wegen der Gleichmäßigkeit von* $(*)$ *konvergiert auch* $\sum_{k=1}^\infty f_k$ *in* $B(A)$.

$C([a,b])$ ist ein Banachraum

Satz.
$C([a,b])$ ist ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis.
z.z.: $C([a,b])$ ist abgeschlossener Unterraum von $B([a,b])$, d.h. für alle

$$\forall f \in \overline{C([a,b])}\ \forall x_0 \in [a,b]\ f \text{ ist stetig in } x_0.$$

$\forall \epsilon > 0$ gilt:

- $\exists g \in C([a,b])$ mit $\|f-g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$;
- da g stetig, $\exists \delta > 0$ mit $|g(x)-g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall x \in B_\delta(x_0)$;
- also gilt für dieses $\delta > 0$: $\forall x \in B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &\le |f(x)-g(x)| + |g(x)-g(x_0)| + |g(x_0)-f(x_0)| \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

□

$C([a,b])$ ist ein Banachraum

Satz.

$C([a,b])$ ist ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis.

z.z.: $C([a,b])$ ist abgeschlossener Unterraum von $B([a,b])$, d.h. für alle

$$\forall f \in \overline{C([a,b])}\ \forall x_0 \in [a,b]\ f \text{ ist stetig in } x_0.$$

$\forall \epsilon > 0$ gilt:

- $\exists g \in C([a,b])$ mit $\|f-g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$;
- da g stetig, $\exists \delta > 0$ mit $|g(x)-g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall x \in B_\delta(x_0)$;
- also gilt für dieses $\delta > 0$: $\forall x \in B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x_0)| &\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-g(x_0)| + |g(x_0)-f(x_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

$\square$

Der Satz von Baire

(X, d) vollständiger metrischer Raum

Theorem. (R.L. Baire, 1899)

Ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen s.d.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X,$$

so hat mindestens ein F_{n_0} einen inneren Punkt.

Beweis – 1

- Mindestens ein F_{n_0} hat einen inneren Punkt, **denn sonst**: hätte jedes F_n keinen inneren Punkt, so wäre $X \setminus F_n \neq \emptyset\ \forall n$.
- Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle offene Mengen $O \neq \emptyset$ würde es dann $x \in X$ und $\epsilon > 0$ geben mit
$$\overline{B_\epsilon(x)} \subset O \setminus F_k,$$
da $O \not\subset F_k$.
- So könnte man
$$x_1 \in X, \qquad \epsilon_1 \in (0,1)$$
wählen, s.d.
$$B_{\epsilon_1}(x_1) \subset X \setminus F_1.$$

Beweis – 2

- So könnte man
$$x_2 \in X, \qquad \epsilon_2 \in (0, 1/2)$$
wählen, s.d.
$$B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \setminus F_2.$$
- ...
- So könnte man
$$x_n \in X, \qquad \epsilon_n \in \left(0, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
wählen, s.d.
$$B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}) \setminus F_n.$$

Beweis – 3

- Da
$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon_{n-1}}{2} < \frac{1}{2^{n-1}}$$
wäre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$.
- Dann wäre
$$\lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) = d(x_n, x) < \frac{\epsilon_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
also $x \notin F_n$ $\forall n$ wegen $B_{\epsilon_n}(x_n) \subset X \setminus F_n$.
- Somit wäre $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. $\lightning$

Alternative Formulierung

(X,d) vollständiger metrischer Raum

Korollar.
Ist $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ Folge offener und dichter Mengen, so ist auch

$$\bigcap O_n$$

dicht in X.

Sei $F_n := X \setminus O_n$. Wende den Satz von Baire auf $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.
[Details: ÜA!]

Alternative Formulierung

X metrischer Raum

- $U \subset X$ heißt nirgends dicht, falls $\overline{U}$ keinen inneren Punkt hat.
- Jedes $A \subset X$, s.d.
$$A = \bigcup U_n$$
für eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $U_n \subset X$ nirgends dicht $\forall n$, heißt von 1. Baire-Kategorie.
- Jedes $A \subset X$, das nicht von 1. Baire-Kategorie ist, heißt von 2. Baire-Kategorie.

Also besagt der Satz von Baire:
Jeder nichttriviale, vollständige metrische Raum ist von 2. Baire-Kategorie.

Beispiele [ÜA]

- $\mathbb{Q}$ ist von 1. Baire-Kategorie in $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und sogar die Menge der transzendenten Zahlen sind von 2. Baire-Kategorie in $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ ist von 1. Baire-Kategorie in $\mathbb{C}$.
- Die Cantor-Menge ist von 1. Baire-Kategorie in $\mathbb{R}$.

Allgemeiner:

- Jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte ist überabzählbar.

  (Denn eine Teilmenge $\{x\}$ kann erst dann einen inneren Punkt haben, wenn $x \in X$ isoliert ist).

Folgerung des Satzes von Baire – #1

Satz.

Jede Basis eines unendlichdimensionalen Banachraumes ist überabzählbar.

Beweis.

- Gäbe es eine Basis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines unendlichdimensionalen Banachraumes X, so könnte man $X_n := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ betrachten.
- X_n abgeschlossen weil $\dim X_n < \infty$, $\forall n$.
- $X = \bigcup X_n$.
- Also würde ein X_n einen inneren Punkt enthälten.
- Enthält ein Unterraum einen inneren Punkt, so ist er bereits der ganzer Raum.
- Also würde $X = X_n$ und somit $\dim X = \dim X_n < \infty$. ↯

□

Folgerung des Satzes von Baire – #1

Satz.

Jede Basis eines unendlichdimensionalen Banachraumes ist überabzählbar.

Beweis.

- Gäbe es eine Basis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines unendlichdimensionalen Banachraumes X, so könnte man $X_n := \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ betrachten.
- X_n abgeschlossen weil $\dim X_n < \infty$, $\forall n$.
- $X = \bigcup X_n$.
- Also würde ein X_n einen inneren Punkt enthälten.
- Enthält ein Unterraum einen inneren Punkt, so ist er bereits der ganzer Raum.
- Also würde $X = X_n$ und somit $\dim X = \dim X_n < \infty$. ↯

□

Folgerung des Satzes von Baire – #2

Satz.
Es gibt $f \in C[0,1]$, s.d. f nirgendwo differenzierbar ist.

Sei

$$O_n := \left(g \in C[0,1] : \sup_{0<|h|<\frac{1}{n}} \left| \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right| > n \ \forall x \in [0,1] \right).$$

Dann ist jedes O_n offen und dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und somit ist auch $\bigcap O_n$ dicht.
[Details: ÜA!]

Operatoren

X, Y Vektorräume

Definition.

- *Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt Operator.*
- *Sein Definitionsbereich $D(T)$ braucht* **nicht** *ganz X zu sein.*
- *Ein Operator heißt linear, falls*

$$T(x+y) = Tx + Ty \qquad \text{und} \qquad T(\lambda x) = \lambda Tx$$

$\forall x, y \in D(T),\ \lambda \in \mathbb{K}.$

Beschränkte Operatoren

X, Y normierte Räume

Definition.

- *Ein linearer Operator $T : X \to Y$ heißt beschränkt, falls*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty.$$

(*Es gilt* $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \equiv \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty$ *und insb.* $D(T) = X$).

- *Der Raum der beschränkten linearen Operatoren $T : X \to Y$ ist $\mathcal{L}(X,Y)$.*
- *Ist $Y = \mathbb{K}$, so heißt $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ beschränktes lineares Funktional.*
- $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ *und* $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$

Submultiplikativität der Operatornorm

X, Y, Z normierte Räume

Lemma.
Sind $T \in \mathcal{L}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z)$*, so ist* $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ *und* $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Beweis.

- $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X \ \forall x \in X$
- $\|STx\|_Z \leq \|S\|\|Tx\|_Y \leq \|S\|\|T\|\|x\|_X \ \forall x \in X$

□

Submultiplikativität der Operatornorm

X, Y, Z normierte Räume

Lemma.
Sind $T \in \mathcal{L}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, *so ist* $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ *und* $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Beweis.

- $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X \ \forall x \in X$
- $\|STx\|_Z \leq \|S\|\|Tx\|_Y \leq \|S\|\|T\|\|x\|_X \ \forall x \in X$

$\square$

X, Y normierte Räume

Lemma.

Ist $T : X \to Y$ linear, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(b) *T ist Lipschitz-stetig.*

(c) *T ist stetig in $0 \in X$.*

Beweis.

- "(a) $\Rightarrow$ (b)" Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so $\|Tx - Ty\| \le \|T\|\|x - y\|$ $\forall x, y \in X$.
- "(c) $\Rightarrow$ (a)" Ist T stetig in 0, so

$$\exists \delta > 0 \text{ s.d. } \|y\| \le \delta \Rightarrow \|Ty\| \le 1,$$

- $\Rightarrow \|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|.$

□

X, Y normierte Räume

Lemma.

Ist $T : X \to Y$ linear, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(b) T *ist Lipschitz-stetig.*

(c) T *ist stetig in* $0 \in X$.

Beweis.

- "$(a) \Rightarrow (b)$" Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so $\|Tx - Ty\| \le \|T\|\|x - y\|$ $\forall x, y \in X$.
- "$(c) \Rightarrow (a)$" Ist T stetig in 0, so

$$\exists \delta > 0 \text{ s.d. } \|y\| \le \delta \Rightarrow \|Ty\| \le 1,$$

- $\Rightarrow \|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|.$

$\square$

X, Y normierte Räume

Satz.

- *$\mathcal{L}(X, Y)$ ist ein normierter Raum bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*
- *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum.*
- *Insbesondere ist X' immer ein Banachraum.*

Beweis.

- Ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchy-Folge $\forall x \in X$.
- Ist Y Banachraum, so $\exists y = \lim T_n x =: Tx$.
- Dadurch definiert man $T : X \to Y$.
- T ist glm. Grenzwert von stetigen linearen Operatoren, also ist T linear und stetig.

$\square$

X, Y normierte Räume

Satz.

- *$\mathcal{L}(X, Y)$ ist ein normierter Raum bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*
- *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum.*
- *Insbesondere ist X' immer ein Banachraum.*

Beweis.

- Ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchy-Folge $\forall x \in X$.
- Ist Y Banachraum, so $\exists y = \lim T_n x =: Tx$.
- Dadurch definiert man $T : X \to Y$.
- T ist glm. Grenzwert von stetigen linearen Operatoren, also ist T linear und stetig.

$\square$

Isomorphismen

X, Y normierte Räume

Definition.

- $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *heißt* *Isomorphismus*, *falls er bijektiv ist mit* T^{-1} *beschränkt*

  d.h., wenn $\exists S \in \mathcal{L}(Y,X)$ *mit* $S \circ T = T \circ S = \mathrm{Id}$.

- $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *heißt* *Isometrie* *falls*

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

- X, Y *heißen* *isomorph*, *falls* $\exists T : X \to Y$ *Isomorphismus.*
- X, Y *heißen* *isometrisch*, *falls* $\exists T : X \to Y$ *isometrisch.*

X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ linear.

- Der Kern und das Bild von T sind

$$\ker T := \{x \in X : Tx = 0\}$$

  bzw.

$$\operatorname{Rg} T := \{Tx \in Y : x \in X\}.$$

- T ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{0\}$.
- Ist T beschränkt, so ist $\ker T$ abgeschlossen.

X, Y normierte Räume

Beispiele.

- $0 : X \ni x \mapsto 0 \in Y$ *ist ein beschränkter linearer Operator mit* $\|0\| = 0$.
- $\mathrm{Id} : X \ni x \mapsto x \in X$ *ist ein beschränkter linearer Operator, die Identität.*
  $\ker \mathrm{Id} = \{0\}$ *und* $\mathrm{Rg}\,\mathrm{Id} = X$. $X \neq \{0\} \Rightarrow \|\mathrm{Id}\| = 1$.
- *Ist* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *ein Isomorphismus, so ist*

  $$1 = \|\mathrm{Id}\| = \|TT^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|,$$

  also gilt immer

  $$\|T\|^{-1} \leq \|T^{-1}\|.$$

Multiplikationsoperatoren

Beispiel.

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $q \in C(K)$
(oder allgemeiner, $K \subset \mathbb{R}^n$ und $q \in C_b(K)$)

$$T : C(K) \ni f \mapsto q \cdot f \in C(K)$$

(oder allgemeiner, $T : C_b(K) \ni f \mapsto q \cdot f \in C_b(K)$)
definiert einen beschränkten linearen Operator mit $\|T\| = \|q\|_\infty$.

- $\|Tf\|_\infty = \|q \cdot f\|_\infty \leq \|q\|_\infty \|f\|_\infty$
- $\|Tf\|_\infty = \|q\|_\infty$, *falls* $f \equiv 1$
- *T Isomorphismus $\Leftrightarrow q(x) > 0$ für alle $x \in K$*
- *Allgemeiner, T Isomorphismus $\Leftrightarrow q(x) \geq q_0 > 0$ für alle $x \in K$, falls K nichtkompakt*

Ortsoperator

Insbesondere, falls $K \subset \mathbb{K}$

Beispiel.

$$R : C(K) \ni f \mapsto \mathrm{id} \cdot f \in C(K)$$

definiert einen beschränkten linearen Operator mit $\|R\| = \sup\{|x| : x \in K\}$.

Ableitungsoperator (Impulsoperator)

Beispiel.

$$S : C(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f' \in C(\mathbb{R})$$

definiert einen linearen Operator (mit $D(S) = C^1(\mathbb{R})$), der unbeschränkt ist.

- *Sei $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ mit*

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{falls } |x| \le \frac{1}{2n}, \\ 1 & \text{falls } |x| \ge \frac{1}{n} \end{cases}$$

  und $|f_n(x)| \le 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\|Sf_n\|_\infty = n \to \infty$, *obwohl* $\|f_n\|_\infty \equiv 1$.

Shiftoperatoren

Beispiele.

- *Der rechte Shiftoperator*

$$J : \ell^p(\mathbb{N}) \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})$$

ist eine Isometrie (und ist somit injektiv), aber kein Isomorphismus.

- *Der linke Shiftoperator*

$$K : \ell^p(\mathbb{N}) \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, \ldots) \in \ell^p(\mathbb{N})$$

ist weder eine Isometrie noch ein Isomorphismus – er ist aber surjektiv.

Beispiele.

- *$(c, \|\cdot\|_\infty)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sind isomorph. [ÜA]*
- *Seien $\|\cdot\|$ und $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ zwei Normen auf einem Vektorraum X. Die Identität ist genau dann ein Isomorphismus von $(X, \|\cdot\|)$ nach $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$, wenn die Normen äquivalent sind. Sie ist genau dann eine Isometrie, wenn die Normen gleich sind.*

Stetige Erweiterung von Operatoren

X, Y normierte Räume, Y vollständig, $E \subset X$ dichter Unterraum

Satz.
Jedes $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ hat eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis.

- Sei $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ mit $\lim x_n = x$
- $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy wegen der Beschränktheit von T auf E
- $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, etwa gegen $\tilde{T}x := \lim Tx_n$
- $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$

$\square$

Stetige Erweiterung von Operatoren

X, Y normierte Räume, Y vollständig, $E \subset X$ dichter Unterraum

Satz.
Jedes $T \in \mathcal{L}(E, Y)$ hat eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis.

- Sei $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ mit $\lim x_n = x$
- $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy wegen der Beschränktheit von T auf E
- $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, etwa gegen $\tilde{T}x := \lim Tx_n$
- $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$

□

Neumann-Reihe

X Banachraum

Lemma.
Ist $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|T\| < 1$, so ist $\mathrm{Id} - T$ ein Isomorphismus und

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \qquad \text{und} \qquad \|(\mathrm{Id} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Beweis

- $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$
- $\mathcal{L}(X)$ ist Banachraum $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{m} T^n =: S_m \to \sum_{n=0}^{\infty} T^n =: S \in \mathcal{L}(X)$
- $S_m(\mathrm{Id} - T) = S_m - S_m T = S_m - T\sum_{n=0}^{m} T^n = S_m - \sum_{n=1}^{m+1} T^n = S_m - (S_{m+1} - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id} - T^{m+1}$
- $S(\mathrm{Id} - T) = \lim_{m\to\infty} S_m(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Id} - \lim_{m\to\infty} T^{m+1} = \mathrm{Id}$, da $\lim_{m\to\infty} \|T^{m+1}\| \leq \lim_{m\to\infty} \|T\|^{m+1} = 0$ wegen $\|T\| < 1$
- Ähnlich: $(\mathrm{Id} - T)S = \mathrm{Id}$
- $(\mathrm{Id} - T)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

J Menge, X Banachraum, Y normierter Raum

Theorem. (S. Banach 1920, T.H. Hildebrandt 1923)
Es sei $(T_j)_{j\in J} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *mit*

$$\sup_{j\in J} \|T_j x\|_Y < \infty \qquad \forall x \in X.$$

Dann

$$\sup_{j\in J} \|T_j\| < \infty.$$

Beweis

- $X_n := \{x \in X : \sup_{j \in J} \|T_j x\|_Y \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$
- $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$
- Baire $\Rightarrow \exists X_{n_0}\ \exists y \in X_{n_0}\ \exists \delta > 0$ s.d. $B_\delta(y) \subset X_{n_0}$
- Sei $z \in X$ s.d. $\|z\|_X = \|(z+y) - y\|_X < \delta$
- $y + z \in B_\delta(y) \subset X_{n_0}$, deshalb

$$\|T_j z\|_Y \leq \|T_j(y+z)\|_Y + \|T_j y\|_Y \leq 2n_0 \qquad \forall j \in J$$

- $\|T_j\| \leq \frac{2n_0}{\delta}\ \forall j \in J$

X Banachraum, Y normierter Raum

Korollar.

Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *s.d.* $\exists Tx := \lim T_n x \ \forall x \in X$. *Dann* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und*

$$\|T\| \le \liminf \|T_n\| \le \sup \|T_n\| < \infty.$$

Beweis.

- Linearität von T klar
- Es gilt $\sup \|T_n x\| < \infty$ (jede konvergente Folge ist beschränkt)
- Prinzip glm. beschr. $\Rightarrow \liminf \|T_n\| \le \sup \|T_n\| < \infty$
- $\Rightarrow \|Tx\| = \lim \|T_n x\| = \liminf \|T_n x\| \le \liminf \|T_n\| \|x\|$

$\square$

X Banachraum, Y normierter Raum

Korollar.

Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *s.d.* $\exists Tx := \lim T_n x \ \forall x \in X$.
Dann $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *und*

$$\|T\| \le \liminf \|T_n\| \le \sup \|T_n\| < \infty.$$

Beweis.

- Linearität von T klar
- Es gilt $\sup \|T_n x\| < \infty$ (jede konvergente Folge ist beschränkt)
- Prinzip glm. beschr. $\Rightarrow \liminf \|T_n\| \le \sup \|T_n\| < \infty$
- $\Rightarrow \|Tx\| = \lim \|T_n x\| = \liminf \|T_n x\| \le \liminf \|T_n\| \|x\|$

$\square$

Satz von Banach–Steinhaus

X Banachraum, Y normierter Raum

Theorem. (S. Banach & H. Steinhaus 1929)

Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(a) *$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark, d.h., $\exists T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\lim T_n x = Tx \; \forall x \in X$.*

(b) *$\exists M > 0$ s.d. $\|T_n\| \le M \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\exists D \subset X$, $\overline{D} = X$, s.d. $\exists \lim T_n x \; \forall x \in D$.*

"$(a) \Rightarrow (b)$" folgt aus dem letzten Korollar.

Beweis von “$(b) \Rightarrow (a)$”

Es seien $x \in X$, $\epsilon > 0$. Wähle

- $z \in D$ mit $\|x - z\| < \frac{\epsilon}{3M}$
- $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n z - T_m z\| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall n, m \geq n_0$.

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n z\| + \|T_n z - T_m z\| + \|T_m z - T_m x\| \\
&\leq \|T_n\| \|x - z\| + \frac{\epsilon}{3} + \|T_m\| \|x - z\| \\
&\leq M \frac{\epsilon}{3M} + \frac{\epsilon}{3} + M \frac{\epsilon}{3M}.
\end{aligned}
$$

Satz über die offene Abbildung

X, Y Banachräume

Theorem. (S. Banach 1929)

Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv, dann ist T ist offen

d.h., $T(G)$ ist offen $\forall G \subset X$ offen.

Beweisskizze:

- $\forall \delta > 0\ \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_{2\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$
- $\forall \delta > 0\ \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_{\epsilon}(0) \subset T(B_\delta(0))$
- $\forall G \subset X$ offen $\forall y \in T(G)\ \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(y) \subset T(G)$.

Beweis - 1

Es sei $\delta > 0$

- $Y_n := n\overline{T(B_\delta(0))} := \{ny \in Y : y \in \overline{T(B_\delta(0))}\}$
- T surjektiv $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$.
- Baire $\Rightarrow \exists Y_{n_0}$ mit einem inneren Punkt $\Rightarrow \overline{T(B_\delta(0))}$ hat einen inneren Punkt y
- $\exists y \in Y \; \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_{4\epsilon}(y) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$.
- $y, -y \in \overline{T(B_\delta(0))}$
- $B_{4\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))} + \overline{T(B_\delta(0))} := \{y_1 + y_2 \in Y : y_1, y_2 \in \overline{T(B_\delta(0))}\}$
- $\overline{T(B_\delta(0))}$ konvex (da T linear) $\Rightarrow \overline{T(B_\delta(0))} + \overline{T(B_\delta(0))} = 2\overline{T(B_\delta(0))}$

Fazit: $\forall \delta > 0 \; \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_{2\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$

Beweis - 2

$\forall \delta > 0\ \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_{2\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$
Es seien $z \in B_\epsilon(0)$ und $\delta > 0$, dann:

- für das obige $\epsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X$ s.d. $\|x_n\| < \frac{\delta}{2^n}$ und $\left\| z - T\sum_{k=1}^n x_k \right\| < \frac{\epsilon}{2^n}$
- $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ ist Cauchy, also konvergiert
- für $x := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ gilt $\|x\|_X < \delta$ und $z = Tx$ (da T stetig)

Fazit: $\forall \delta > 0\ \exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(0) \subset T(B_\delta(0))$

Schließlich: es seien $G \subset X$ offen und $y \in T(G)$, dann

- wähle $x \in X$ s.d. $y = Tx$
- $\exists \delta > 0$ s.d. $B_\delta(x) \subset G$
- $\exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(0) \subset TB_\delta(0)$
- $B_\epsilon(y) = y + B_\epsilon(0) \subset y + TB_\delta(0) = Tx + TB_\delta(0) = TB_\delta(x) \subset T(G)$.

Satz der beschränkten Inverse

X, Y Banachräume

Korollar. (S. Banach 1929)
Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, dann ist T ein Isomorphismus.

Beweis.

- Linearität von T^{-1}: klar
- es sei $y \in Y$ s.d. $y = Tx$
- bekannt: $\exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(0) \subset T(B_1(0))$
- also: $\|Tx\|_Y \leq \epsilon \Rightarrow \|x\|_X \leq 1$
- $\Rightarrow \|y\|_Y \leq \epsilon \Rightarrow \|T^{-1}y\|_X \leq 1$
- Linearität $\Rightarrow$ T^{-1} ist beschränkt

□

Satz der beschränkten Inverse

X, Y Banachräume

Korollar. (S. Banach 1929)
Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, dann ist T ein Isomorphismus.

Beweis.

- Linearität von T^{-1}: klar
- es sei $y \in Y$ s.d. $y = Tx$
- bekannt: $\exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(0) \subset T(B_1(0))$
- also: $\|Tx\|_Y \leq \epsilon \Rightarrow \|x\|_X \leq 1$
- $\Rightarrow \|y\|_Y \leq \epsilon \Rightarrow \|T^{-1}y\|_X \leq 1$
- Linearität $\Rightarrow$ T^{-1} ist beschränkt

$\square$

Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^n$

X Banachrraum

Theorem.
Ist $\dim X < \infty$, *so sind je zwei Normen* $\|\cdot\|$ *und* $\|\cdot\|$ *auf* X *äquivalent.*

Anmerkung.
Gilt auch wenn X *nicht als vollständig angenommen wird: Also ist* X *bzgl. jeder Norm ein Banachraum.*

Beweis

- Sei $\Phi : \mathbb{K}^n \ni x \mapsto \sum_{j=1}^n x_j e_j \in X$, wobei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset X$ eine Basis.
- Φ ist bijektiv.
- Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$, so gilt

$$\|\Phi(x)\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e_k\| \overset{C-S}{\leq} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =: M\|x\|_2.$$

  Somit ist $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, X)$.
- Satz der beschr. Inv. $\Rightarrow \Phi^{-1}$ beschränkt.
- $|||y||| = |||\Phi x||| \leq M'\|x\|_2 \leq \frac{M'}{m}\|y\| \leq \frac{MM'}{mm'}|||y|||$.

X, Y normierte Räume

Korollar.

Ist $\dim X < \infty$*, so ist jedes lineare* $T : X \to Y$ *beschränkt.*

Beweis.

- Bzgl. dem Isomorphismus
$$\Phi : \mathbb{K}^n \ni x \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in X$$
gilt
$$\|T\Phi(x)\| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_j Te_j\right| \overset{C-S}{\leq} \|x\|_2 \|Te\|_2.$$
- $\Rightarrow T \circ \Phi$ ist stetig und somit auch $T = T \circ \Phi \circ \Phi^{-1}$.

$\square$

X, Y normierte Räume

Korollar.

Ist $\dim X < \infty$*, so ist jedes lineare* $T : X \to Y$ *beschränkt.*

Beweis.

- Bzgl. dem Isomorphismus

$$\Phi : \mathbb{K}^n \ni x \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in X$$

gilt

$$\|T\Phi(x)\| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_j T e_j\right| \overset{C-S}{\leq} \|x\|_2 \|Te\|_2.$$

- $\Rightarrow T \circ \Phi$ ist stetig und somit auch $T = T \circ \Phi \circ \Phi^{-1}$.

$\square$

Banachscher Fixpunktsatz

(X, d) vollständiger metrischer Raum

Definition.

$T : X \to X$ heißt Kontraktion, falls $\exists \alpha \in (0, 1)$ s.d.

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

(T ist dann auch stetig).

Theorem. (S. Banach 1922)

Jede Kontraktion hat genau einen Fixpunkt.

Korollar.

Es sei $T : X \to X$ stetig. Ist T^k Kontraktion für $k \in \mathbb{N}$, so hat T genau einen Fixpunkt.

[ÜA]

Beweis

- Sei $x_0 \in X$ (beliebig) und $x_k := T^k x_0$.
- $d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0) \leq \alpha d(T^{n-1} x_0, T^{m-1} x_0)$
  $\leq \ldots \leq \alpha^n d(x_0, T^{m-n} x_0)$
- $d(x_0, T^{m-n} x_0) \leq d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, T^2 x_0) + \ldots$
  $+ d(T^{m-n-1} x_0, T^{m-n} x_0)$
  $\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \alpha^k d(x_0, Tx_0) < \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, Tx_0)$
- $d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, Tx_0) \overset{n\to\infty}{\to} 0$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.
- Für $x = \lim x_n$ gilt

$$Tx = \lim_n Tx_n = \lim_n x_{n+1} = x.$$

- Gilt $Ty = y$ für einen $y \in X$, so ist

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

also $d(x, y) = 0$.

Eine Folgerung des Banachschen Fixpunktsatzes

X, Y Banachräume, $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$

Korollar.
Ist T Isomorphismus und $\|S\|^{-1} > \|T^{-1}\|$, so ist auch $S + T$ Isomorphismus.

Beweis.

- Sei $y \in Y$ und $C := T^{-1}y - T^{-1}S$.
- C ist eine (nichtlineare) Kontraktion, da

$$\|Cx - Cz\| = \|T^{-1}Sx - T^{-1}Sz\| \leq \|T^{-1}\|\|S\|\|x - z\| \quad \forall x, z \in X.$$

- $\exists | x \in X$ s.d. $Cx = x$, d.h. $x = T^{-1}y - T^{-1}Sx$.
- $Tx + Sx = y$ hat eine genau eine Lösung, also ist $T + S$ bijektiv.
- Satz beschr. Inv. $\Rightarrow$ $T + S$ Isomorphismus.

$\square$

Eine Folgerung des Banachschen Fixpunktsatzes

X, Y Banachräume, $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$

Korollar.

Ist T Isomorphismus und $\|S\|^{-1} > \|T^{-1}\|$, so ist auch $S + T$ Isomorphismus.

Beweis.

- Sei $y \in Y$ und $C := T^{-1}y - T^{-1}S$.
- C ist eine (nichtlineare) Kontraktion, da

  $$\|Cx - Cz\| = \|T^{-1}Sx - T^{-1}Sz\| \le \|T^{-1}\|\|S\|\|x - z\| \quad \forall x, z \in X.$$

- $\exists | x \in X$ s.d. $Cx = x$, d.h. $x = T^{-1}y - T^{-1}Sx$.
- $Tx + Sx = y$ hat eine genau eine Lösung, also ist $T + S$ bijektiv.
- Satz beschr. Inv. $\Rightarrow$ $T + S$ Isomorphismus.

$\square$

Zur Erinnerung

X normierter Raum, dann ist $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ sein Dual

Notation: $\langle f, x\rangle := f(x)\ \forall x \in X,\ \forall f \in X'$

X' Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle f, x\rangle$$

Beispiel.

- $C[0,1] \ni u \mapsto \int_0^1 u(s)ds \in \mathbb{K}$
- $c \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_n x_n \in \mathbb{K}$

Was sind ihre Normen? [ÜA]

Das Lemma von Zorn

Eine halbgeordnete Menge heißt induktiv, falls jede Kette (d.h. jede total geordnete Teilmenge) eine obere Schranke hat.

Lemma. (K. Kuratowski 1922, M. Zorn 1935)

Jede nichtleere halbgeordnete induktive Menge enthält mindestens ein maximales Element.

Der Satz von Hahn-Banach

X Vektorraum auf $\mathbb{R}$

Theorem. (E. Helly 1912, H. Hahn 1927, S. Banach 1932)

Sei $p : X \to \mathbb{R}$ homogen und konvex, d.h.

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \text{bzw.} \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$\forall x, y \in X$, $\forall \lambda > 0$.

Sei Y Unterraum von X und $g : Y \to \mathbb{R}$ linear s.d.

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Y.$$

Dann $\exists f : X \to \mathbb{R}$ lineare Fortsetzung von g s.d.

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Beweis – 1

- Sei P die Menge aller linearen Abbildungen $h : X \to \mathbb{R}$, dessen Definitionsbereich $D(h)$ Y enthält und in X enthalten ist und welche g fortsetzen und $h(x) \leq p(x)$ $\forall x \in D(h)$ erfüllen.
- P ist halbgeordnet durch

$$h_1 \leq h_2 \quad :\Leftrightarrow \quad D(h_1) \subset D(h_2) \text{ \& } h_2 \text{ ist Fortsetzung von } h_1.$$

- $P \neq \emptyset$, da $g \in P$.
- Sei $Q \subset P$ eine Kette, etwa $Q = (h_i)_{i \in I}$ und sei $h : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(h) &:= \bigcup_{i \in I} D(h_i) \\ h(x) &:= h_i(x) \qquad \text{falls } \exists i \in I \text{ s.d. } x \in D(h_i). \end{aligned}$$

- h ist wohl definiert: falls $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$, entweder $D(h_1) \subset D(h_2)$ oder $D(h_2) \subset D(h_1)$ und in beiden Fälle $h_1(x) = h_2(x)$.
- h ist ein maximales Element für Q.
- $\Rightarrow$ P ist induktiv.
- Zorn $\Rightarrow \exists (f, D(f))$ maximales Element für P.

Beweis – 2

- Es bleibt zu zeigen, dass $D(f) = X$. **Denn sonst**: Gäbe es $x_0 \in X \setminus D(f)$, dann sei $j_\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definiert durch
$$\begin{aligned} D(j_\alpha) &:= D(f) + \mathbb{R}x_0, \\ j_\alpha(x + tx_0) &:= f(x) + t\alpha. \end{aligned}$$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $D(j_\alpha)$ ist ein Unterraum von X, der Y enthält und j_α ist linear.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: j_α ist Fortsetzung von g, da
$$j_\alpha(x) = j_\alpha(x + 0x_0) = f(x) = g(x) \qquad \forall x \in Y.$$
- Suche $\alpha \in \mathbb{R}$ s.d. $j_\alpha \in P$, d.h., s.d.
$$j_\alpha(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \le p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f),\ t \in \mathbb{R},$$
d.h. (Homogenität von p!), s.d.
$$\begin{aligned} f(x) + \alpha &\le p(x + x_0) \quad \text{und} \\ f(x) - \alpha &\le p(x - x_0) \end{aligned}$$
$\forall x \in D(f)$, d.h., s.d.
$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \le \alpha \le \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x))$$

Beweis - 3

- Tatsächlich $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\sup_{y\in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x\in D(f)} (p(x + x_0) - f(x))$$

denn (da p konvex)

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

und somit

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$$

$\forall x, y \in D(f)$.

- Somit wäre $f \leq j_\alpha$ mit $j_\alpha \in P$ aber $f \neq j_\alpha$, obwohl f maximales Element von P ist. $\lightning$
- Also tatsächlich $D(f) = X$.

Der Satz von Hahn-Banach - allgemeine Version

X Vektorraum auf $\mathbb{K}$

Theorem. (F. Bohnenblust & A. Sobczyk 1938)

Sei $p : X \to \mathbb{R}$ $|\cdot|$*-homogen und konvex, d.h.*

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \qquad \textit{bzw.} \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$
Sei Y *Unterraum von* X *und* $g : Y \to \mathbb{K}$ *linear s.d.*

$$|g(x)| \leq p(x) \qquad \forall x \in Y.$$

Dann $\exists f : X \to \mathbb{K}$ *lineare Fortsetzung von* g *s.d.*

$$|f(x)| \leq p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Beweis - 1

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt

$$g(x) \leq |g(x)| \leq p(x) \qquad \forall x \in Y.$$

- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists f : X \to \mathbb{R}$ s.d.

$$f(x) \leq p(x), \qquad x \in X.$$

- Weiter gilt wegen $|\cdot|$-Homogenität

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x) \qquad \forall x \in X.$$

- Also $-p(x) \leq f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$.

Beweis - 2

- Betrachte Y, X als Vektorräume auf $\mathbb{R}$: $Y_\mathbb{R}, X_\mathbb{R}$.
- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt
$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x) \qquad \forall x \in Y_\mathbb{R},$$
wobei $g_1, g_2 : Y_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear bzgl. $Y_\mathbb{R}$ sind.
- Es gilt
$$g_i(x) \leq |g(x)| \leq p(x) \qquad \forall x \in Y_\mathbb{R}.$$
- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists f_1 : X_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fortsetzung von g_1 s.d.
$$f_1(x) \leq p(x), \qquad x \in X_\mathbb{R}.$$
- $ig = g_1(i\cdot) + ig_2(i\cdot)$, da
$$i(g_1(x) + ig_2(x)) = ig(x) = g(ix) = g_1(ix) + ig_2(ix) \qquad \forall x \in X_\mathbb{R}.$$
- Die Realteile stimmen überein $\Rightarrow g_1(i\cdot) = -g_2$
- Sei
$$f(x) := f_1(x) - if_1(ix) \qquad \forall x \in X.$$
- f_1 Erweiterung von g_1 und $g_1(i\cdot) = -g_2 \Rightarrow f$ Erweiterung von g.

Beweis - 3

Noch z.z.: (1) f ist linear auf X und (2) $|f(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$.

(1) $f((a+ib)x) = (a+ib)f(x)$: wegen $\mathbb{R}$-Linearität von f_1 [ÜA]

(2.a) Ist x s.d. $f(x) = 0$, so gilt (2) da

$$\begin{aligned} 2p(x) &= p(x) + |-1|p(x) = p(x) + p(-x) \\ &\geq p(x-x) = p(0x) = 0p(x) = 0 \end{aligned}$$

und somit $p(x) \geq 0 = f(x)\ \forall x$ wegen $|\cdot|$-Homogenität und Konvexität von p.

(2.b) Ist x s.d. $f(x) \neq 0$, also $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$ und $|f(x)| = f(x)e^{-i\theta} = f(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|f(x)| = f(e^{-i\theta}x) = f_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x)$$

$\forall x \in X$.

Folgerungen von Hahn–Banach - 1

X normierter Raum

Korollar.
*Sind Y ein normierter Unterraum von X (**bzgl. der von X induzierten Norm!**) und $g \in Y'$, so $\exists f \in X'$ s.d.*

- *f ist Fortsetzung von g*
- $\|f\|_{X'} = \|g\|_{Y'}$

Beweis.

- $p(x) := \|g\|_{Y'} \|x\|_X$.
- p ist homogen und konvex und

$$g(x) \leq \|g\|_{Y'} \|x\|_X = p(x) \qquad \forall x \in Y.$$

- Wende Hahn–Banach an.

□

Folgerungen von Hahn–Banach - 1

X normierter Raum

Korollar.

*Sind Y ein normierter Unterraum von X (**bzgl. der von X induzierten Norm!**) und $g \in Y'$, so $\exists f \in X'$ s.d.*

- *f ist Fortsetzung von g*
- $\|f\|_{X'} = \|g\|_{Y'}$

Beweis.

- $p(x) := \|g\|_{Y'} \|x\|_X$.
- p ist homogen und konvex und

$$g(x) \leq \|g\|_{Y'} \|x\|_X = p(x) \qquad \forall x \in Y.$$

- Wende Hahn–Banach an.

$\square$

Anmerkung

Im vorigen Satz ist es wesentlich, dass man Y mit $\|\cdot\|_X$ versieht.
Betrachte z.B. $X := C[0,1]$ und $Y := C^1[0,1]$. Da $\delta' : f \mapsto f'(0)$ kein stetiges lineares Funktional auf X ist, kann auch nicht $\delta' \in Y'$ gelten.
Das ist tatsächlich der Fall, wenn man $Y = C^1[0,1]$ als normierter Raum mit $\|\cdot\|_\infty$ versieht.
Dass Y selber ein normierter Raum ist (bzgl. der Norm $\|f\|_Y := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$) spielt hier keine Rolle.

Folgerungen von Hahn–Banach - 2

X normierter Raum

Korollar.
Ist $x_0 \in X$, so $\exists f \in X'$ s.d.

$$\|f\|_{X'} = \|x_0\|_X \qquad \textit{und} \qquad \langle f, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

(Die Menge $J(x) \subset X'$ solcher f heißt Dualitätsmenge).

Beweis.

- Sei $Y := \mathbb{R}x_0$, $g(tx_0) := t\|x_0\|_X^2$.
- Dann gilt $\|g\|_{Y'} = \|x_0\|_X$.
- Wende das vorige Korollar an.

$\square$

Folgerungen von Hahn–Banach - 2

X normierter Raum

Korollar.
Ist $x_0 \in X$, so $\exists f \in X'$ s.d.

$$\|f\|_{X'} = \|x_0\|_X \qquad \text{und} \qquad \langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

(Die Menge $J(x) \subset X'$ solcher f heißt Dualitätsmenge).

Beweis.

- Sei $Y := \mathbb{R}x_0$, $g(tx_0) := t\|x_0\|_X^2$.
- Dann gilt $\|g\|_{Y'} = \|x_0\|_X$.
- Wende das vorige Korollar an.

$\square$

Folgerungen von Hahn–Banach - 3

X normierter Raum

Korollar.

Ist $x \in X$, so gilt

$$\|x\|_X = \sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \max_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x\rangle|.$$

Beweis.

- $x = 0$: klar.
- $x \neq 0$: $|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X \ \forall f \in X'$ und somit

$$\sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|_X.$$

- $J(x) \neq \emptyset$, also $\exists f \in X'$ s.d. $\|f\|_{X'} = \|x\|_X$ und $\langle f, x\rangle = \|x\|_X^2$.
- Sei $h := \frac{f}{\|x\|_X} \in X'$, dann gilt $\|h\|_{X'} = 1$ und $\langle h, x\rangle = \|x\|_X$.

Folgerungen von Hahn–Banach - 3

X normierter Raum

Korollar.

Ist $x \in X$, so gilt

$$\|x\|_X = \sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \max_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x\rangle|.$$

Beweis.

- $x = 0$: klar.
- $x \neq 0$: $|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X \; \forall f \in X'$ und somit

$$\sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|_X .$$

- $J(x) \neq \emptyset$, also $\exists f \in X'$ s.d. $\|f\|_{X'} = \|x\|_X$ und $\langle f, x\rangle = \|x\|_X^2$.
- Sei $h := \frac{f}{\|x\|_X} \in X'$, dann gilt $\|h\|_{X'} = 1$ und $\langle h, x\rangle = \|x\|_X$.

Folgerungen von Hahn–Banach - 4

lim ist ein stetiges lineares Funktional auf c.

Satz.

Es existiert $\mathrm{LIM} \in (\ell^\infty)'$, *das* $\lim \in c'$ *fortsetzt und s.d. zusätzlich*

- *Ist* $J : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, *so gilt* $\mathrm{LIM}(x_n) = \mathrm{LIM}(J(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
- *Ist* $x_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{LIM}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$.

LIM *heißt Banach-Limes.*

Beweis.

[ÜA] □

Folgerungen von Hahn–Banach - 4

lim ist ein stetiges lineares Funktional auf c.

Satz.
Es existiert $\mathrm{LIM} \in (\ell^\infty)'$, *das* $\lim \in c'$ *fortsetzt und s.d. zusätzlich*

- *Ist* $J : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, *so gilt* $\mathrm{LIM}(x_n) = \mathrm{LIM}(J(x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
- *Ist* $x_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{LIM}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$.

LIM *heißt Banach-Limes.*

Beweis.
[ÜA] □

X reeller Vektorraum

Definition.

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $f \not\equiv 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so heißt

$$\{x \in X : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

eine Hyperebene zu f.
$A, B \subset X$ werden durch die Hyperebene $f^{-1}(\{\alpha\})$ getrennt, falls

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \qquad \forall x \in A \ \forall y \in B.$$

A, B werden durch f getrennt, falls sie durch eine Hyperebene zu f getrennt werden.

Eine Hyperebene ist immer $\neq X$, da f nichtkonstant.

Lemma.

Sei X normierter Vektorraum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $f \not\equiv 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Hyperebene $f^{-1}(\{\alpha\})$ genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis.

"$\Leftarrow$" Klar

"$\Rightarrow$"

- H^C ist offen und $H^C \neq \emptyset$.
- Sei $x_0 \in H^C$, o.B.d.A. $f(x_0) < \alpha$ und $\exists r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset H^C$.
- $f(x) < \alpha \ \forall x \in B_r(x_0)$, **denn sonst** für $x_1 \in B_r(x_0)$ mit $f(x_1) > \alpha$ gelte es $[x_0, x_1] := \{\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 : \lambda \in [0,1]\} \subset B_r(x_0)$, also

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \neq \alpha, \qquad \forall \lambda \in [0,1],$$

obwohl für $\lambda := \frac{\alpha - f(x_1)}{f(x_0)-f(x_1)} \in (0,1)$ und $1-\lambda = \frac{f(x_0)-\alpha}{f(x_0)-f(x_1)}$

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) = \alpha \qquad ↯$$

- Also $f(x_0 + rz) < \alpha \ \forall z \in B_1(0)$, d.h., f ist stetig mit $\|f\| \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

Lemma.

Sei X normierter Vektorraum. Ist $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $f \not\equiv 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Hyperebene $f^{-1}(\{\alpha\})$ genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.

Beweis.

"$\Leftarrow$" Klar

"$\Rightarrow$"

- H^C ist offen und $H^C \neq \emptyset$.
- Sei $x_0 \in H^C$, o.B.d.A. $f(x_0) < \alpha$ und $\exists r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset H^C$.
- $f(x) < \alpha\ \forall x \in B_r(x_0)$, **denn sonst** für $x_1 \in B_r(x_0)$ mit $f(x_1) > \alpha$ gelte es $[x_0, x_1] := \{\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 : \lambda \in [0,1]\} \subset B_r(x_0)$, also

  $$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \neq \alpha, \qquad \forall \lambda \in [0,1],$$

  obwohl für $\lambda := \frac{\alpha - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \in (0,1)$ und $1 - \lambda = \frac{f(x_0) - \alpha}{f(x_0) - f(x_1)}$

  $$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) = \alpha \qquad \lightning$$

- Also $f(x_0 + rz) < \alpha\ \forall z \in B_1(0)$, d.h., f ist stetig mit $\|f\| \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

X reeller Vektorraum

Definition.

$C \subset X$ heißt konvex, falls

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \qquad \forall x, y \in C, \ \ \forall \lambda \in (0,1).$$

Beispiel.

Offene sowie abgeschlossene Kugeln in metrischen Räumen sind konvex.

Anmerkung.

- *Ist $C \subset X$ konvex, so ist auch die Menge ihrer inneren Punkte konvex.*
- *Ist $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie konvexer Mengen, so ist $\bigcap_{i\in I} C_i$ konvex.*

1. geometrische Version des Satzes von Hahn–Banach

X reeller Vektorraum

Theorem.
Sei $C \subset X$ konvex, offen und $C \neq \emptyset$. Ist $x_0 \in X \setminus C$, so $\exists f : X \to \mathbb{R}$ linear s.d.

$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in C.$$

Ist X normiert, so ist $f \in X'$ und insbesondere trennt die abgeschlossene Hyperebene $f^{-1}(\langle f, x_0 \rangle)$ die Mengen $\{x_0\}, C$.

- Eigentlich kann die Annahme der Offenheit von C durch die Annahme der Existenz eines inneren Punktes von C ersetzt werden.
- In komplexen Räumen gilt der Satz auch, allerdings mit $\mathrm{Re} f(x) < \mathrm{Re} f(x_0) \; \forall x \in C$.

X reeller Vektorraum

Definition.

Sei $C \subset X$ konvex. Das Minkowski-Funktional zu C ist

$$p_C : X \ni x \mapsto \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in C\} \in [0, \infty].$$

Lemma.

- *Sei $C \subset X$ offen und konvex, $0 \in C$. Dann gilt*

$$C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$$

und p_C ist ≥ 0, homogen und konvex. Ist X normiert, so

$$p_C(x) \leq M\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

- *Sei $p : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und homogen. Dann ist*

$$D := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$$

konvex. Gilt zusätzlich $0 \leq p(x) < \infty\ \forall x \in X$, so ist jedes Element von

$$\{x \in X : p(x) < 1\}$$

ein innerer Punkt von D.

Beweis - 1

- Sei $x \in X$. Da C offen, $\exists r > 0$ s.d. $B_r(0) \subset C$, also
$$p_C(x) \leq \frac{1}{r}\|x\| \qquad \forall x \in X.$$
- Homogenität: klar.
- "$C \subset \{x \in X : p_C(x) < 1\}$": für $x \in C$ $\exists \epsilon > 0$ s.d. $(1+\epsilon)x \in C$, also
$$p_C(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1.$$
- "$C \supset \{x \in X : p_C(x) < 1\}$": Ist $p_C(x) < 1$, so $\exists \alpha \in (0,1)$ s.d. $\alpha^{-1}x \in C$ und somit
$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C,$$
da C konvex mit $0 \in C$.
- Fazit: $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$.

Beweis - 2

Noch z.z.: Konvexität von p_C

- Seien $x, y \in X$ und $\epsilon > 0$, also $\frac{x}{p_C(x)+\epsilon}, \frac{y}{p_C(y)+\epsilon} \in C$ und

$$\frac{tx}{p_C(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{p_C(y)+\epsilon} \in C \qquad \forall t \in [0,1].$$

- Für $t := \frac{p_C(x)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}$ gilt

$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} \in C,$$

also

$$p_C\left(\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}\right) < 1.$$

- Homogenität von $p_C \Rightarrow p_C(x+y) \le p_C(x) + p_C(y) + 2\epsilon \ \forall \epsilon > 0$.

Beweis - 3

- $\forall x, y \in D \; \forall \lambda \in [0,1]$ gilt
$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$
- Sei jetzt $0 \leq p(x) < \infty \; \forall x \in X$. Ist $p(x) < 1$, so gilt
$$p(x \pm ty) \leq p(x) + tp(\pm y), \qquad \forall t > 0, \; \forall y \in X.$$
- Gilt $p(-y) = p(y) = 0$, so ist $x \pm ty \in D \; \forall t > 0$.
- Gilt jedoch $(p(-y), p(y)) \neq (0,0)$, so ist $x \pm ty \in D$ für
$$t < \frac{1 - p(x)}{\max\{|p(y)|, |p(-y)|\}}.$$

Beweis der 1. geom. Version von Hahn–Banach

- Bis auf Translation nimm o.B.d.A. an, dass $0 \in C$. Betrachte p_C.
- Sei $G := \mathbb{R}x_0$ und $g : G \ni tx_0 \mapsto t \in R$.
- Es gilt $g(x) \leq p_C(x)\ \forall x \in G$, denn für $t < 0$ nutzt man $p_C \geq 0$ und für $t \geq 0$ gilt $g(tx_0) = t \leq tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$ (da $x_0 \notin C$).
- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists f$ lineare Fortsetzung von g mit $f(x) \leq p_C(x) \leq M\|x\|\ \forall x \in X$ und somit $f \in X'$.
- Insbesondere: $f(x_0) = g(x_0) = 1$ und $f(x) < 1\ \forall x \in C$.

2. geometrische Version des Satzes von Hahn–Banach

X reeller normierter Raum

Korollar.
Seien $A, B \subset X$ konvex und disjunkt und A offen. Dann $\exists \phi \in X'$, das A, B trennt.

Beweis

- Sei $C := A - B$.
- C ist konvex: denn sind $x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in C$, so ist

  $$\lambda(x_1-y_1)+(1-\lambda)(x_2-y_2) = \big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)-\big(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\big) \in A-B$$

  da A, B konvex.
- C ist offen, da $C = \bigcup_{y\in B}(A - y)$.
- $0 \notin C$, da A, B disjunkt.
- 1. geometrische Version von Hahn–Banach $\Rightarrow \exists \phi \in X'$ s.d. $\phi(x - y) < 0 \ \forall (x - y) \in C$, d.h.

  $$\phi(x) < \phi(y) \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

- $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ mit

  $$\alpha \in [\sup_{x\in A} \phi(x), \inf_{y\in B} \phi(y)].$$

- Die Hyperebene $\phi^{-1}(\{\alpha\})$ trennt A und B.

3. geometrische Version des Satzes von Hahn–Banach

X reeller normierter Raum
$M \subset X$ heißt kompakt, falls jedes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (in M!) konvergente Teilfolge hat.

Theorem.
Seien $A, B \subset X$ konvex und disjunkt, A abgeschlossen, B kompakt. Dann $\exists$ eine abgeschlossene Hyperebene, die A, B strikt trennt, d.h., $\exists \phi \in X'$, $\phi \not\equiv 0$ und $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\langle \phi, a\rangle \leq \alpha < \beta \leq \langle \phi, b\rangle \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B.$$

Beweis

- Seien $A_\epsilon := A + B_\epsilon(0)$, $B_\epsilon := B + B_\epsilon(0)$.
- A_ϵ, B_ϵ sind konvex und nichtleer $\forall \epsilon > 0$.
- A_ϵ, B_ϵ sind offen $\forall \epsilon > 0$, da $B_\epsilon(0)$ offen.
- $\exists \epsilon > 0$ s.d. $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$: **denn sonst** seien $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ s.d. $\epsilon_n \to 0$ und $\|x_n - y_n\| < 2\epsilon_n$ und betrachte eine konvergente Teilfolge, also $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ mit $\lim_k y_{n_k} = y \in A$, obwohl $A \cap B = \emptyset$. $\lightning$
- 2. geom. Version von Hahn–Banach $\Rightarrow \exists\ \phi \in X'$, das A_ϵ, B_ϵ trennt und somit $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.d.

  $$\langle \phi, x + \epsilon w\rangle \le \alpha \le \langle \phi, y - \epsilon z\rangle \qquad \forall x \in A,\ y \in B,\ w, z \in B_1(0),$$

  also

  $$\langle \phi, x\rangle + \epsilon\|\phi\| \le \alpha \le \langle \phi, y\rangle - \epsilon\|\phi\| \qquad \forall x \in A,\ y \in B.$$

- Da $\phi \not\equiv 0$,

  $$\langle \phi, x\rangle \le \alpha - \epsilon\|\phi\| < \alpha + \epsilon\|\phi\| \le \langle \phi, y\rangle \qquad \forall x \in A,\ y \in B,\ z \in B_1(0),$$

  also trennt ϕ A, B strikt.

Folgerungen von Hahn–Banach - 5

X normierter Raum

Satz.
Ist Z abg. Unterraum und $x_0 \in X \setminus Z$, so $\exists f \in X'$ s.d.

$$f_{|Z} \equiv 0 \quad \textit{aber} \quad f(x_0) \neq 0.$$

Beweis.

- $Z, \{x_0\}$ sind konvex, disjunkt und abgeschlossen bzw. kompakt.
- $\exists f \in X'$, das sie strikt trennt, also $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall x \in Z.$$

- $\lambda \langle f, x \rangle = \langle f, \lambda x \rangle < \alpha \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, also $\langle f, x \rangle = 0$, $\forall x \in Z$.

□

Folgerungen von Hahn–Banach - 5

X normierter Raum

Satz.
Ist Z abg. Unterraum und $x_0 \in X \setminus Z$, so $\exists f \in X'$ s.d.

$$f_{|Z} \equiv 0 \quad \textit{aber} \quad f(x_0) \neq 0.$$

Beweis.

- $Z, \{x_0\}$ sind konvex, disjunkt und abgeschlossen bzw. kompakt.
- $\exists f \in X'$, das sie strikt trennt, also $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall x \in Z.$$

- $\lambda \langle f, x \rangle = \langle f, \lambda x \rangle < \alpha \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$, also $\langle f, x \rangle = 0$, $\forall x \in Z$.

$\square$

Folgerungen von Hahn–Banach - 6

Satz.
Sei $K \subset X$ kompakt und konvex. Ist $T : K \to K$ stetig und affin, d.h.

$$T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y)$$

$\forall x, y \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$, *so hat T einen Fixpunkt.*

Man verwendet:

Theorem. (A.N. Tychonov 1935)
Das Produkt endlich vieler kompakten Mengen ist wieder kompakt.

Beweis - 1

- T hat einen Fixpunkt, **denn sonst** wären $\Delta, \Gamma \subset X \times X$ disjunkt, wobei

$$\Delta := \{(x,x) \in X \times X : x \in K\}, \qquad \Gamma := \{(y, Ty) \in X \times X : y \in K\}.$$

- id, T stetig $\Rightarrow \Delta, \Gamma$ abgeschlossen.
- T stetig $\Rightarrow T(K)$ kompakt.
- $K \times K \supset \Delta$ abgeschlossen, $K \times T(K) \supset \Gamma$ abgeschlossen
- Tychonov $\Rightarrow K \times K, K \times T(K)$ kompakt $\Rightarrow \Delta, \Gamma$ kompakt.
- Δ, Γ konvex da T affin.
- 3. geom. Version von Hahn–Banach $\Rightarrow \Delta, \Gamma$ werden von einer abgeschlossenen Hyperebene in $X \times X$ strikt getrennt, also $\exists \phi \in (X \times X)' \ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\phi(x,x) \leq \alpha < \beta \leq \phi(y, Ty), \qquad \forall x, y \in X.$$

- Dann sind $f_1, f_2 \in X'$, wobei

$$f_1(x) := \phi(x, 0), \qquad f_2(x) := \phi(0, x), \qquad x \in X.$$

Beweis - 2

- Es gilt
$$f_1(x) + f_2(x) \le \alpha < \beta \le f_1(y) + f_2(Ty), \qquad \forall x, y \in X.$$
- Für $x = y$ gilt $f_2(x) \le \alpha - f_1(x) < \beta - f_1(x) \le f_2(Tx)$, also
$$f_2(Tx) - f_2(x) \ge \beta - \alpha > 0, \qquad \forall x \in X,$$
- Da f_2 stetig ist $f_2(K)$ ist kompakt.
- $(f_2(T^n x - x))_{n\in\mathbb{N}} \subset f_2(K)$ hat eine konvergente Teilfolge.
- Dennoch gilt
$$f_2(T^n x - x) = \sum_{k=1}^{n} (f_2(T^k x) - f_2(T^{k-1}x)) \ge n(\beta - \alpha) \to \infty,$$
also hat $(f_2(T^n x - x))_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt. $\lightning$

Anwendung: der Fixpunktsatz von Kakutani

X normierter Raum, I Menge

Korollar. (S. Kakutani 1941)

Sei $K \subset X$ kompakt und konvex. Sei $T_i : K \to K$ stetig und affin $\forall i \in I$. Kommutieren alle T_i paarweise, so haben sie einen gemeinsamen Fixpunkt.

Beweis

Sei $K_i := \{x \in K : T_i x = x\}$. Z.z.: $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.

- Obiger Fixpunktsatz $\Rightarrow K_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$.
- K_i ist kompakt (da K_i abgeschlossen in K) und konvex (da T affin) $\forall i \in I$.
- $\forall x \in K_j$ gilt
$$T_j T_i x = T_i T_j x = T_i x,$$
also $T_i x \in K_j$, d.h. $T_i(K_j) \subset K_j$, also ist $T_{i_{|K_j}}$ eine stetige affine Abbildung auf K_j.
- Obiger Fixpunktsatz $\Rightarrow \exists$ Fixpunkt x_{ij} von $T_{i_{|K_j}}$, $x_{ij} \in K_i \cap K_j$.
- Also $K_i \cap K_j \neq \emptyset \ \forall i, j \in I$.
- Z.z.: Endliche Durchschnitte von K_i's sind $\neq \emptyset$ – Durch Induktion!
- Induktionsanfang: schon bewiesen.
- Indukstionsschritt: Ist $\bigcap_{i\in J} K_i \neq \emptyset$ mit $|J| = n$ und betrachte $K_{i'}$, so sind beide $\bigcap_{i\in J} K_i$ und $K_{i'}$ kompakt, konvex und $\neq \emptyset$ und man zeigt wie oben, dass $\bigcap_{i\in J} K_i \cap K_{i'} \neq \emptyset$. [Details: ÜA]

Die Polare einer Menge

X normierter Raum, $M \subset X$, $N \subset X'$

Definition.

- *Die* Polare M° *von M ist*

$$\{f \in X' : |\langle f, x\rangle| \leq 1 \ \forall x \in M\}.$$

- *Die* Polare ${}^\circ N$ *von N ist*

$$\{x \in X : |\langle f, x\rangle| \leq 1 \ \forall f \in N\}.$$

- *Die* Bipolare *von M ist ${}^\circ(M^\circ)$.*

Ist $M_1 \subset M_2$, so gilt $M_2^\circ \subset M_1^\circ$.

X normierter Raum, $M \subset X$, $N \subset X'$

Definition.

- *M heißt ausgeglichen, falls*

$$x \in M \;\&\; |\lambda| \le 1 \Rightarrow \lambda x \in M.$$

- *M heißt absolutkonvex, falls M konvex und ausgeglichen ist.*
- *Die konvexe Hülle $\mathrm{co}(M)$ von M ist die kleinste konvexe Menge $\supset M$.*
- *Die absolutkonvexe Hülle $\mathrm{absco}(M)$ von M ist die kleinste absolutkonvexe Menge $\supset M$.*

[ÜA]

- Ist M absolutkonvex, so ist immer M sternformig bzgl. 0, aber nicht umgekehrt.
- M° und ${}^\circ N$ sind immer abgeschlossen und absolutkonvex.
- M ist genau dann absolutkonvex, wenn $\forall x, y \in M$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K} \;\&\; |\lambda| + |\mu| \le 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M.$$

Beispiel: Unterräume

Beispiel.

Seien X normierter Raum, Y Unterraum von X, Z Unterraum von X'. Dann gilt:

- $Y^\circ = \{f \in X' : \langle f, x\rangle = 0 \ \forall x \in Y\}$.
- ${}^\circ Z = \{x \in X : \langle f, x\rangle = 0 \ \forall f \in Z\}$.
- $\{0\}^\circ = X'$ *und* ${}^\circ\{0\} = X$.
- *Ein Unterraum ist immer absolutkonvex.*

Hahn–Banach für absolutkonvexe Mengen

X reeller normierter Raum

Korollar.
Seien

- *$A, B \subset X$ disjunkt,*
- *A abgeschlossen und absolutkonvex,*
- *B kompakt und konvex.*

Dann $\exists \phi \in X'$, $\phi \not\equiv 0$ und $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.d.

$$|\langle \phi, x\rangle| \leq \alpha < \beta \leq \langle \phi, y\rangle \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Beweis.
$|\langle \phi, x\rangle| = \langle \phi, x\rangle \mathrm{sgn}(\langle \phi, x\rangle) = \langle \phi, \mathrm{sgn}(\langle \phi, x\rangle) x\rangle$, mit $\mathrm{sgn}(\langle \phi, x\rangle) x \in A$ da A ausgeglichen. $\square$

Hahn–Banach für absolutkonvexe Mengen

X reeller normierter Raum

Korollar.
Seien

- $A, B \subset X$ *disjunkt,*
- A *abgeschlossen und absolutkonvex,*
- B *kompakt und konvex.*

Dann $\exists \phi \in X'$, $\phi \not\equiv 0$ *und* $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *s.d.*

$$|\langle \phi, x\rangle| \leq \alpha < \beta \leq \langle \phi, y\rangle \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Beweis.
$|\langle \phi, x\rangle| = \langle \phi, x\rangle \mathrm{sgn}(\langle \phi, x\rangle) = \langle \phi, \mathrm{sgn}(\langle \phi, x\rangle)x\rangle$, mit $\mathrm{sgn}(\langle \phi, x\rangle)x \in A$ da A ausgeglichen. $\square$

Folgerungen von Hahn–Banach - 7

X normierter Raum

Theorem. (Bipolarensatz)

Ist $M \subset X$, $M \neq \emptyset$. Dann gilt ${}^\circ(M^\circ) = \overline{\mathrm{absco}(M)}$.

Korollar.

Für einen Unterraum Y von X gilt genau dann $\overline{Y} = X$, wenn $Y^\circ = \{0_{X'}\}$.

Beweis.

- "$\Rightarrow$" $f_{|Y} \equiv 0$ $\forall f \in Y^\circ$ und deshalb auch (da Y dicht) $0 \equiv f_{|\overline{Y}} = f_{|X}$ $\forall f \in Y^\circ$.
- "$\Leftarrow$" Gilt $Y^\circ = \{0\}$, so ist $\overline{Y} = \overline{\mathrm{absco}(Y)} = {}^\circ(Y^\circ) = {}^\circ\{0_{X'}\} = X$.

$\square$

Folgerungen von Hahn–Banach - 7

X normierter Raum

Theorem. (Bipolarensatz)
Ist $M \subset X$, $M \neq \emptyset$. Dann gilt $^\circ(M^\circ) = \overline{\mathrm{absco}(M)}$.

Korollar.
Für einen Unterraum Y von X gilt genau dann $\overline{Y} = X$, wenn $Y^\circ = \{0_{X'}\}$.

Beweis.

- "⇒" $f_{|Y} \equiv 0\ \forall f \in Y^\circ$ und deshalb auch (da Y dicht) $0 \equiv f_{|\overline{Y}} = f_{|X}\ \forall f \in Y^\circ$.
- "⇐" Gilt $Y^\circ = \{0\}$, so ist $\overline{Y} = \overline{\mathrm{absco}(Y)} = {}^\circ(Y^\circ) = {}^\circ\{0_{X'}\} = X$.

□

Beweis des Bipolarensatzes

Wir zeigen $\overline{\mathrm{absco}(M)} \subset {}^\circ(M^\circ) \subset {}^\circ\left(\overline{\mathrm{absco}(M)}^\circ\right) \subset \overline{\mathrm{absco}(M)}$

- Sei $x \in M$. Dann gilt $|\langle f, x\rangle| \leq 1 \; \forall f \in M^\circ$ und somit $x \in {}^\circ(M^\circ)$.
- Somit ist $M \subset {}^\circ(M^\circ)$ und deshalb $\overline{\mathrm{absco}(M)} \subset {}^\circ(M^\circ)$, da Polare abgeschlossen und absolutkonvex sind.
- ${}^\circ(M^\circ) \subset {}^\circ\left(\overline{\mathrm{absco}(M)}^\circ\right)$, da $M \subset \overline{\mathrm{absco}(M)}$ und somit $\overline{\mathrm{absco}(M)}^\circ \subset M^\circ$.
- Gilt $\overline{\mathrm{absco}(M)} = X$, so gibt es nichts zu zeigen.
- Ist $x_0 \in X \setminus \overline{\mathrm{absco}(M)}$, so $\exists \phi \in X'$, $\phi \not\equiv 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.d.

  $$|\langle \phi, x\rangle| \leq \alpha < \langle \phi, x_0\rangle \qquad \forall x \in \overline{\mathrm{absco}(M)},$$

  dank Hahn–Banach, da $\{x_0\}$ kompakt und konvex und $\overline{\mathrm{absco}(M)}$ abgeschlossen und absolutkonvex sind.
- O.b.d.A. $\alpha = 1$ und somit $\phi \in \overline{\mathrm{absco}(M)}^\circ$ aber $x_0 \notin {}^\circ\left(\overline{\mathrm{absco}(M)}^\circ\right)$.

X normierter Vektorraum.

Definition.

Der Banachraum $X'' := (X')'$ heißt Bidual von X.

Satz.

X ist isometrisch zu X''.

Beweis.

- Betrachte $j : X \ni x \mapsto j_x \in X''$, wobei

$$j_x : X' \ni f \mapsto \langle f, x \rangle \in \mathbb{K}.$$

- $\forall x \in X$ j_x linear und

$$\|j_x\| = \sup_{\|f\|'_X \le 1} |j_x(f)| = \sup_{\|f\|'_X \le 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|,$$

dank Hahn–Banach.

$\square$

X normierter Vektorraum.

Definition.

Der Banachraum $X'' := (X')'$ heißt Bidual *von X.*

Satz.

X ist isometrisch zu X''.

Beweis.

- Betrachte $j : X \ni x \mapsto j_x \in X''$, wobei
$$j_x : X' \ni f \mapsto \langle f, x\rangle \in \mathbb{K}.$$
- $\forall x \in X$ j_x linear und
$$\|j_x\| = \sup_{\|f\|'_X \le 1} |j_x(f)| = \sup_{\|f\|'_X \le 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|,$$
dank Hahn–Banach.

□

Identifiziere also jeden normierten Raum X mit $j(X) \subset X''$.

Lemma.
Ein normierter Raum X ist genau dann vollständig, wenn $j(X)$ in X'' abgeschlossen ist.

Korollar.
Zu jedem normierten Raum X $\exists$ $\hat{X}$ Banachraum, die Vervollständigung von X, s.d. $\overline{X} = \hat{X}$.

Beweis.
$\hat{X} := j^{-1}\overline{j(X)}$. □

Identifiziere also jeden normierten Raum X mit $j(X) \subset X''$.

Lemma.
Ein normierter Raum X ist genau dann vollständig, wenn $j(X)$ in X'' abgeschlossen ist.

Korollar.
Zu jedem normierten Raum X $\exists$ $\hat{X}$ Banachraum, die Vervollständigung von X, s.d. $\overline{X} = \hat{X}$.

Beweis.
$\hat{X} := j^{-1}\overline{j(X)}$. $\square$

Reflexive Räume

Definition.

Ein normierter Vektorraum X heißt reflexiv, falls $j : X \to X''$ surjektiv (und somit ein Isomorphismus) ist.

Z.B., jeder endlichdimensionale Raum ist reflexiv.

Theorem.

Jeder reflexive normierte Raum ist vollständig.

Beweis.

Jeder reflexive X ist isomorph zum Banachraum X'': somit ist X Banachraum. $\square$

Reflexive Räume

Definition.
Ein normierter Vektorraum X heißt reflexiv, falls $j : X \to X''$ surjektiv (und somit ein Isomorphismus) ist.

Z.B., jeder endlichdimensionale Raum ist reflexiv.

Theorem.
Jeder reflexive normierte Raum ist vollständig.

Beweis.
Jeder reflexive X ist isomorph zum Banachraum X'': somit ist X Banachraum. $\square$

Fundamentales Beispiel: die ℓ^p-Räume

Zur Erinnerung:
$\ell^p := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\} \qquad \forall p \in [1,\infty)$

Satz.
$(\ell^p)'$ ist isometrisch isomorph zu ℓ^q, $\forall p,q \in (1,\infty)$ s.d. $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

$(\ell^p)'$ und ℓ^q werden herkömmlich identifiziert.

Beweis - 1

Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: ähnlich falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Ist $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, so ist
$$\gamma_y : \ell^p \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n \in \mathbb{R}$$
linear und ein (dank Hölderscher Ungleichung) wohldefiniertes stetiges Funktional, $\gamma_y \in (\ell^p)'$, mit
$$\|\gamma_y\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_q.$$
- $\gamma : \ell^q \ni y \mapsto \gamma_y \in (\ell^p)'$ ist linear.
- Sei $\psi \in (\ell^p)'$ und $y_n := \psi(e_n)$, es gilt
$$\langle \psi, x\rangle = \left\langle \psi, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n \qquad \forall x \in c_{00}.$$
- Für festes $n \in \mathbb{N}$ definiere die abgeschnittene Folge $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ durch
$$x_k^{(n)} := \begin{cases} |y_k|^{q-2} y_k & \text{falls } k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis - 2

- Dann gilt
$$\sum_{k=1}^n |y_k|^q = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \langle \psi, x^{(n)} \rangle \le \|\psi\| \|x^{(n)}\|_p.$$
- Da $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt weiter
$$\|x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k^{(n)}|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^{(q-1)p} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q.$$
- Somit $\sum_{k=1}^n |y_k|^q \le \|\psi\| \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, d.h.
$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \le \|\psi\|.$$
- Für $n \to \infty$ erhält man
$$\|y\|_q = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|\psi\| < \infty.$$
- Also $y \in \ell^q$ und $\gamma_y = \psi$ da $\overline{c_{00}} = \ell^p$, also $\|\gamma_y\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_q$.

Zur Erinnerung:
$\ell^\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$.

Satz.
$(\ell^1)'$ ist isometrisch isomorph zu ℓ^∞.

Beweis - 1

- Jede $x \in \ell^1$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k e_k$, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kanonische Basis.
- Betrachte

$$\gamma : (\ell^1)' \ni \psi \mapsto (y_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\langle \psi, e_k \rangle)_{k\in\mathbb{N}}.$$

- γ ist linear.
- Dann ist

$$\langle \psi, x \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k x_k, \qquad \forall x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k e_k \in \ell^1.$$

- $|y_k| = |\langle \psi, e_k \rangle| \le \|e_k\| \|\psi\|_{(\ell^1)'} = \|\psi\|_{(\ell^1)'}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, d.h. $y \in \ell^\infty$ mit $\|y\|_\infty \le \|\psi\|_{(\ell^1)'}$.
- Also ist $\gamma : (\ell^1)' \to \ell^\infty$, γ beschränkt.

Beweis - 2

Noch z.z.: γ ist surjektiv und isometrisch.

- Sei $y \in \ell^\infty$ und definiere ψ durch
$$\langle \psi, x\rangle := \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k, \qquad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1.$$
- Dann ist ψ linear und (wegen Hölder) stetig, also $\psi \in (\ell^1)'$ und $\gamma\psi = y$ nach Konstruktion.
- γ ist surjektiv
- Seien $\psi \in (\ell^1)'$ und $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Dann ist
$$|\langle \psi, x\rangle| = \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k\right| \le \|y\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|_1 \|y\|_\infty,$$
also $\|\psi\|_{(\ell^1)'} \le \|y\|_\infty$.
- Da aber $\|y\|_\infty \le \|\psi\|_{(\ell^1)'}$ (schon bekannt), $\|y\|_\infty = \|\gamma\psi\|_\infty = \|\psi\|_{(\ell^1)'}$.

Beispiel.

Sei $X = c_0$. *Man kann zeigen, dass* $X' = \ell^1$. *Somit ist* c_0 *nicht reflexiv.*

[Details: ÜA]

Satz.

Ist ein normierter Raum X reflexiv, so ist jeder seiner abgeschlossenen Unterräume Y reflexiv.

Beweis.

- Sei $\phi \in Y''$. Z.z.: $\phi = j_{x_0}$ für ein $x_0 \in Y$.
- Betrachte $\psi : X' \ni x' \mapsto \phi(x'_{|Y}) \in \mathbb{K}$: somit ist $\psi \in X''$.
- X reflexiv $\Rightarrow \psi = j_{x_0}$ für ein $x_0 \in X$ und somit
$$\phi(x'_{|Y}) = \langle x', x_0 \rangle \qquad \forall x' \in X',$$
da $\phi(x'_{|Y}) = \psi(x') = j_{x_0}(x') \equiv \langle x', x_0 \rangle$.
- $x_0 \in Y$, **denn sonst** $\exists x' \in X'$ s.d. $x'_{|Y} \equiv 0$ aber $\langle x', x_0 \rangle \neq 0$ dank Hahn–Banach $\lightning$
- Ist $y' \in Y'$, so $\exists x' \in X'$ mit $x'_{|Y} = y'$ dank Hahn–Banach.
- Somit
$$\phi(y') = \langle y', x_0 \rangle \qquad \forall y' \in Y',$$
d.h. $\phi = j_{x_0}$.

Satz.

Ist ein normierter Raum X reflexiv, so ist jeder seiner abgeschlossenen Unterräume Y reflexiv.

Beweis.

- Sei $\phi \in Y''$. Z.z.: $\phi = j_{x_0}$ für ein $x_0 \in Y$.
- Betrachte $\psi : X' \ni x' \mapsto \phi(x'_{|Y}) \in \mathbb{K}$: somit ist $\psi \in X''$.
- X reflexiv $\Rightarrow \psi = j_{x_0}$ für ein $x_0 \in X$ und somit

  $$\phi(x'_{|Y}) = \langle x', x_0 \rangle \qquad \forall x' \in X',$$

  da $\phi(x'_{|Y}) = \psi(x') = j_{x_0}(x') \equiv \langle x', x_0 \rangle$.
- $x_0 \in Y$, **denn sonst** $\exists x' \in X'$ s.d. $x'_{|Y} \equiv 0$ aber $\langle x', x_0 \rangle \neq 0$ dank Hahn–Banach $\lightning$
- Ist $y' \in Y'$, so $\exists x' \in X'$ mit $x'_{|Y} = y'$ dank Hahn–Banach.
- Somit

  $$\phi(y') = \langle y', x_0 \rangle \qquad \forall y' \in Y',$$

  d.h. $\phi = j_{x_0}$.

Korollar.

Ein normierter Raum X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Beweis.

"$\Rightarrow$"

- Sei $\phi \in (X')'' = (X'')'$.
- Sei $x_0' := \phi \circ j \in X'$ ($j : X \to X''$ kanon. Einbettung), also

$$\langle x_0', x \rangle = \langle \phi, j_x \rangle, \qquad \forall x \in X.$$

- Sei $x'' = j_{x_1} \in X''$ (da X reflexiv). Es gilt

$$\langle \phi, x'' \rangle = \langle \phi, j_{x_1} \rangle = \langle x_0', x_1 \rangle = x''(x_0'),$$

d.h. $\phi = j_{x_0'}$.

"$\Leftarrow$" Es folgt aus "$\Rightarrow$", dass X'' reflexiv ist und somit X (abg. Unterraum von X'') auch. $\square$

Korollar.

Ein normierter Raum X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

Beweis.

"$\Rightarrow$"

- Sei $\phi \in (X')'' = (X'')'$.
- Sei $x_0' := \phi \circ j \in X'$ ($j : X \to X''$ kanon. Einbettung), also

$$\langle x_0', x\rangle = \langle \phi, j_x\rangle, \qquad \forall x \in X.$$

- Sei $x'' = j_{x_1} \in X''$ (da X reflexiv). Es gilt

$$\langle \phi, x''\rangle = \langle \phi, j_{x_1}\rangle = \langle x_0', x_1\rangle = x''(x_0'),$$

  d.h. $\phi = j_{x_0'}$.

"$\Leftarrow$" Es folgt aus "$\Rightarrow$", dass X'' reflexiv ist und somit X (abg. Unterraum von X'') auch. $\square$

X normierter Raum

Definition.

X heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $M \subset X$ gibt s.d. $\overline{M} = X$.

Theorem.

Ist X' separabel, so ist X separabel.

Korollar.

Ist X reflexiv, so ist X genau dann separabel, wenn X' separabel ist.

Beweis

- Sei $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X'$ dicht in X'.
- Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{aber} \quad |\langle f_n, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|f_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Sei M der von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ aufgespannte Unterraum von X.
- Sei $f \in M^\circ \subset X'$, also $\exists\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ s.d. $\lim_k f_{n_k} = f$.
- Es gilt

$$0 \leftarrow \|f - f_{n_k}\| \geq |\langle (f - f_{n_k}), x_{n_k}\rangle| \overset{f\in M^\circ}{=} |\langle f_{n_k}, x_{n_k}\rangle| \geq \frac{1}{2}\|f_{n_k}\|,$$

  also $\lim_k f_{n_k} = 0$ und somit $f = 0$.
- Also $\overline{M} = X$, da $M^\circ = \{0\}$.
- Sei nun K die Menge aller $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$, so ist diese Menge abzählbar.
- $\overline{K} \supset M$ [ÜA] und $\overline{M} \supset X$, also $\overline{K} \supset X$.

Satz.
Ist $p \in [1, \infty)$, so ist ℓ^p separabel.

Korollar.
c_0 ist separabel.

Beweis.
c_0 ist Prädual vom separablen Raum ℓ^1. □

Satz.

Ist $p \in [1, \infty)$, so ist ℓ^p separabel.

Korollar.

c_0 ist separabel.

Beweis.

c_0 ist Prädual vom separablen Raum ℓ^1. $\square$

Beweis des Satzes

- Sei $M := \{(x_1, \dots, x_N, 0 \dots) \subset \mathbb{Q} : N \in \mathbb{N}\} = c_{00} \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
- M ist abzählbar.
- $\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2}.$$

- Wähle $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{Q}$ s.d. $|x_k - y_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2N}\ \forall k \leq N$.
- Also

$$\|x - y\|_p^p = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p.$$

- $\overline{M} = \ell^p$.

Satz.

ℓ^∞ ist nicht separabel.

Beweis.

- Betrachte die Menge M aller Folgen, die nur aus $0, 1$ bestehen. Diese Menge ist zu $2^{\mathbb{N}}$ bijektiv vermöge $x_n = 1 \Leftrightarrow n \in A \in 2^{\mathbb{N}}$.
- Somit ist M überabzählbar.
- Sind $x, y \in M$, $x \neq y$, so $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$, also $\|x - y\|_\infty = 1$. (M ist also bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ein diskreter metrischer Raum.)
- Betrachte die Menge $\bigcup_{x \in M} B_{\frac{1}{2}}(x)$.
- Gilt $K \subset M$ mit $\overline{K} = M$, d.h. gilt

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall x \in M \; \exists y \in K \text{ s.d. } y \in B_\epsilon(x),$$

so muss es mindestens ein $y \in K$ in jedem $B_{\frac{1}{2}}(x)$ geben und somit muss K auch überabzählbar sein.

$\square$

Satz.

ℓ^∞ ist nicht separabel.

Beweis.

- Betrachte die Menge M aller Folgen, die nur aus $0, 1$ bestehen. Diese Menge ist zu $2^{\mathbb{N}}$ bijektiv vermöge $x_n = 1 \Leftrightarrow n \in A \in 2^{\mathbb{N}}$.
- Somit ist M überabzählbar.
- Sind $x, y \in M$, $x \neq y$, so $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$, also $\|x - y\|_\infty = 1$. (M ist also bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ein diskreter metrischer Raum.)
- Betrachte die Menge $\bigcup_{x \in M} B_{\frac{1}{2}}(x)$.
- Gilt $K \subset M$ mit $\overline{K} = M$, d.h. gilt

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall x \in M \; \exists y \in K \text{ s.d. } y \in B_\epsilon(x),$$

so muss es mindestens ein $y \in K$ in jedem $B_{\frac{1}{2}}(x)$ geben und somit muss K auch überabzählbar sein.

$\square$

Korollar.

Ist X separabel mit X' nicht separabel, so ist X' nicht reflexiv.

Beweis.

- Ist X reflexiv, so ist X genau dann separabel, wenn X'' separabel ist.
- Ist X'' separabel, so ist X' separabel.

□

Korollar.

ℓ^p ist genau dann reflexiv, wenn $p \in (1, \infty)$.

Beweis.

- $(\ell^p)' = \ell^q$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, also $(\ell^p)'' = \ell^p$ falls $1 < p < \infty$.
- ℓ^1 ist separabel, aber $\ell^\infty = (\ell^1)'$ ist es nicht $\Rightarrow \ell^1$ ist nicht reflexiv.
- Somit ist auch ℓ^∞ nicht reflexiv.

Korollar.

Ist X separabel mit X' nicht separabel, so ist X' nicht reflexiv.

Beweis.

- Ist X reflexiv, so ist X genau dann separabel, wenn X'' separabel ist.
- Ist X'' separabel, so ist X' separabel.

□

Korollar.

ℓ^p ist genau dann reflexiv, wenn $p \in (1, \infty)$.

Beweis.

- $(\ell^p)' = \ell^q$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, also $(\ell^p)'' = \ell^p$ falls $1 < p < \infty$.
- ℓ^1 ist separabel, aber $\ell^\infty = (\ell^1)'$ ist es nicht $\Rightarrow$ ℓ^1 ist nicht reflexiv.
- Somit ist auch ℓ^∞ nicht reflexiv.

Korollar.

Ist X separabel mit X' nicht separabel, so ist X' nicht reflexiv.

Beweis.

- Ist X reflexiv, so ist X genau dann separabel, wenn X'' separabel ist.
- Ist X'' separabel, so ist X' separabel.

□

Korollar.

ℓ^p ist genau dann reflexiv, wenn $p \in (1, \infty)$.

Beweis.

- $(\ell^p)' = \ell^q$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, also $(\ell^p)'' = \ell^p$ falls $1 < p < \infty$.
- ℓ^1 ist separabel, aber $\ell^\infty = (\ell^1)'$ ist es nicht $\Rightarrow$ ℓ^1 ist nicht reflexiv.
- Somit ist auch ℓ^∞ nicht reflexiv.

□

Schwache Konvergenz

Kann ein neuer Konvergenzbegriff helfen?

Definition.

Sei X ein normierter Raum. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$, $x_n \rightharpoonup x$, falls

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle \qquad \forall f \in X'.$$

Anmerkung.

Ist X ein Banachraum, so impliziert der Satz von Banach–Steinhaus, dass jede schwach-konvergente Folge beschränkt ist.

Starke Konvergenz von Operatoren

X, Y normierte Räume

Definition.
Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ konvergiert stark gegen $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, falls

$$Tx = \lim_{n\in\mathbb{N}} T_n x \qquad \forall x \in X.$$

- Der Satz von Banach–Steinhaus ist somit eine Aussage über starke Konvergenz.
- Ist insbesondere $Y = \mathbb{K}$, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ stark gegen f, falls
$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle \qquad \forall x \in X.$$

Schwache*-Konvergenz von Operatoren

X normierter Raum

X' ist ein normierter Raum, also kann eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ schwach konvergieren, d.h.

$$\langle x'', f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x'', f_n\rangle \qquad \forall x'' \in X''.$$

Definition.
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ konvergiert schwach gegen $f \in X'$, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, falls*

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle \qquad \forall x \in X.$$

Die entsprechenden Topologien bezeichnet man

$$\sigma(X', X'') \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma(X', X).$$

- Die schwache* Konvergenz ist also eigentlich die *starke* Konvergenz, wenn man X' als normierter Raum ansieht.
- Der Satz von Banach–Steinhaus impliziert, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ genau dann schwach* gegen $f \in X'$ konvergiert, wenn $\exists M > 0$ s.d. $\|f_n\|_{X'} \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\exists D \subset X$, $\overline{D} = X$, s.d. $\exists \lim \langle f_n, x\rangle \; \forall x \in D$.
- Insbesondere sind alle schwach*-konvergente Folgen in X' beschränkt.

- Der Grenzwert bzgl. $\sigma(X', X)$ ist eindeutig. [ÜA]
- Aus $\sigma(X', X'')$-Konvergenz folgt $\sigma(X', X)$-Konvergenz, da $X \subset X''$.
- Insbesondere sind alle schwach-konvergente Folgen in X' beschränkt.
- Aus $\sigma(X', X)$-Konvergenz folgt i.A. **nicht** $\sigma(X', X'')$-Konvergenz.
  Denn für $X = c_0$ und $X' = \ell^1$ gilt: die Basisvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren schwach* gegen 0, aber nicht schwach, denn $\mathbf{1} \in \ell^\infty = (\ell^1)'$ und $\langle \mathbf{1}, e_n\rangle \equiv 1$.

Das Diagonalfolgen-Argument

Lemma.
Sei $(M_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter metrischer Räume. Ist $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}} \subset M_n$, so $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend s.d. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{m\to\infty} x_{\phi(m)}^{(n)}$.

Beweis.

- Finde (Induktion! [Details ÜA]) eine Folge unendlicher Mengen $J_n \subset \mathbb{N}$ s.d. $J_1 \supset J_2 \supset \ldots$.
- Sei $\phi(n) :=$ n-tes Element von J_n, so dass $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend ist.
- Sei $J := \{\phi(n) \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$.
- $|J \setminus J_n| < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\exists \lim_{m\to\infty} x_{\phi(m)}^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_{\phi(m)}^{(n)})_{m\in\mathbb{N}} = (x_m^{(n)})_{m\in J}$ konvergiert.

Das Diagonalfolgen-Argument

Lemma.

Sei $(M_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter metrischer Räume. Ist $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}} \subset M_n$, so $\exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend s.d. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{m\to\infty} x_{\phi(m)}^{(n)}$.

Beweis.

- Finde (Induktion! [Details ÜA]) eine Folge unendlicher Mengen $J_n \subset \mathbb{N}$ s.d. $J_1 \supset J_2 \supset \dots$.
- Sei $\phi(n) := n$-tes Element von J_n, so dass $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend ist.
- Sei $J := \{\phi(n) \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$.
- $|J \setminus J_n| < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\exists \lim_{m\to\infty} x_{\phi(m)}^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_{\phi(m)}^{(n)})_{m\in\mathbb{N}} = (x_m^{(n)})_{m\in J}$ konvergiert.

$\square$

Der Satz von Banach–Alaoglu

X Banachraum

Satz. (S. Banach 1932)

Ist X separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.

Beweis.

- Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X'$ mit $\|f_m\| \le M$.
- Betrachte eine dichte Teilmenge $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$.
- $x_m^{(n)} := \langle f_m, x_n\rangle \in \mathbb{K}$ mit $|x_m^{(n)}| \le M\|x_n\|$.
- Diagonalisierung für $M_n := \overline{B_{M\|x_n\|}(0)} \Rightarrow \exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x_m\rangle$.
- Satz von Banach–Steinhaus $\Rightarrow \forall x \in X\ \exists \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x\rangle$.

□

Der Satz von Banach–Alaoglu

X Banachraum

Satz. (S. Banach 1932)

Ist X separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.

Beweis.

- Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X'$ mit $\|f_m\| \leq M$.
- Betrachte eine dichte Teilmenge $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$.
- $x_m^{(n)} := \langle f_m, x_n\rangle \in \mathbb{K}$ mit $|x_m^{(n)}| \leq M\|x_n\|$.
- Diagonalisierung für $M_n := \overline{B_{M\|x_n\|}(0)} \Rightarrow \exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x_m\rangle$.
- Satz von Banach–Steinhaus $\Rightarrow \forall x \in X\ \exists \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k}, x\rangle$.

$\square$

X Banachraum

Lemma

(1) *Ist X separabel, etwa $X = \overline{\mathrm{span}\{x_m : m \in \mathbb{N}\}}$, so ergibt sich aus*

$$d(\phi, \psi) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} |\langle \phi - \psi, x_m \rangle|$$

eine Metrik auf $B_1(0) \subset X'$, welche $\sigma(X', X)$ definiert.

(2) *Ist X reflexiv und separabel, so gibt es eine Metrik auf $B_1(0) \subset X$, welche die schwache Topologie definiert.*

Beweis.

[Details: ÜA] □

X Banachraum

Anmerkung.

- *L. Alaoglu bewies 1940, dieser Satz gilt auch, wenn X ein (möglicherweise nichtseparabel) allgemeiner normierter Raum ist.*
- *Der Satz von Banach–Alaoglu besagt: $B_1(0) \subset X'$ ist schwach*-kompakt.*
- *Analog gilt auch, falls X reflexiv und separabel ist: $B_1(0) \subset X$ ist schwach-kompakt.*
- *Ist X' separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach-Cauchy-Teilfolge, da i.A. besitzt jede beschränkte Folge in X'' eine $\sigma(X'', X')$-konvergente Teilfolge.*
- *Insbesondere hat jede Folge in $B_1(0) \subset c_0$ eine schwach-Cauchy(nicht notwendigerweise eine schwach-konvergente, da c_0 nicht schwach-vollständig ist!) Teilfolge*

X Banachraum

Korollar.

Ist X reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach-konvergente Teilfolge.

(Die Umkehrung gilt auch: Satv von Eberlein-Šmulian (1947).)

Beweis.

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| \le \mu \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Sei M der von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ aufgespannte Unterraum von X.
- $\overline{M}$ ist separabel und reflexiv (da abg. Unterraum eines reflexiven Raumes).
- Auch $\overline{M}'$ ist separabel und reflexiv.
- Satz von Banach–Alaoglu für $\overline{M}'$ $\Rightarrow$ jede beschr. Folge in $\overline{M}''$ besitzt eine schwach*-konv. Teilfolge $\Rightarrow$ jede beschr. Folge in $\overline{M}$ besitzt eine schwach-konv. Teilfolge.
- Somit besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach-konv. Teilfolge.

□

X Banachraum

Korollar.

Ist X reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge in X eine schwach-konvergente Teilfolge.

(Die Umkehrung gilt auch: Satv von Eberlein-Šmulian (1947).)

Beweis.

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| \leq \mu \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Sei M der von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ aufgespannte Unterraum von X.
- $\overline{M}$ ist separabel und reflexiv (da abg. Unterraum eines reflexiven Raumes).
- Auch $\overline{M}'$ ist separabel und reflexiv.
- Satz von Banach–Alaoglu für $\overline{M}'$ $\Rightarrow$ jede beschr. Folge in $\overline{M}''$ besitzt eine schwach*-konv. Teilfolge $\Rightarrow$ jede beschr. Folge in $\overline{M}$ besitzt eine schwach-konv. Teilfolge.
- Somit besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach-konv. Teilfolge.

□

Also: Ist X ein separabler oder reflexiver Banachraum, so besitzt jede beschränkte Folge in X' eine schwach*-konvergente Teilfolge.

Anmerkung.

I.A. ist das falsch:

- *Sei* $X := \ell^\infty$ *und* $\phi_n : X \ni (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \mapsto x_n \in \mathbb{C}$.
- *Betrachte eine beliebige Teilfolge* $(\phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und*

$$x_n := \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = n_k, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

- *Es gilt* $x := (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ *und* $\phi_{n_k}(x) = (-1)^k$, *also konvergiert* **keine** *Teilfolge von* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *schwach* (und somit auch nicht schwach).*

Das Lemma von Schur

Satz.
Konvergiert eine Folge in ℓ^1 schwach, so konvergiert sie bereits in Norm.

Für einen Beweis: vgl. J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, §V.5.

H Vektorraum auf $\mathbb{K}$

Definition.

Ein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ *auf* H *ist*

$$(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$$

s.d.

(1) $(x|x) \geq 0$ *und* $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$,

(3) $(x|y + z) = (x|y) + (x|z)$.

sowie (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*)*

(4) $(x|y) = (y|x)$

bzw. (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*)*

(4)' $(x|y) = \overline{(y|x)}$

$\forall x, y \in H, \alpha \in \mathbb{K}$.

$(H, (\cdot|\cdot)_H)$ *heißt dann Prähilbertraum.*

- Jedes Skalarprodukt definiert eine Norm durch

$$\|x\| := (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

  [ÜA]
- Ist ein Prähilbertraum bzgl. der assoziierten Norm vollständig, so heißt er Hilbertraum.
- Insbesondere ist jeder Hilbertraum ein Banachraum.

David Hilbert (1862–1943)

Charakterisierung eines Prähilbertraums

Lemma

- *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und H Prähilbertraum, so gilt $\forall x, y \in H$*
$$(x|y)_H = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$
- *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und H Prähilbertraum, so gilt $\forall x, y \in H$*
$$(x|y)_H = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

Beweis.

[ÜA] □

H Prähilbertraum

Definition.

$x, y \in H$ sind orthogonal bzw. $x \perp y$, falls

$$(x|y) = 0.$$

$A, B \subset H$ sind orthogonal bzw. $A \perp B$, falls

$$(x|y) = 0 \qquad \forall x \in A,\ y \in B.$$

$A^\perp$ ist der Unterraum aller $y \in H$, so dass

$$y \perp x \qquad \forall x \in A.$$

Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung

H Prähilbertraum

Lemma.

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y) \qquad \forall x, y \in H.$$

Beispiel.

Für $H = \ell^2$ ist das die Hölder-Ungleichung.

Beweis

Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: ähnlich falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Klar, falls $y = 0$.
- Sei $y \neq 0$. Dann

$$0 \leq (x - \lambda y | x - \lambda y)_H = (x|x)_H + |\lambda|^2 (y|y)_H - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}(x|y)_H)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in H$.

- Für $\lambda = \frac{(x|y)_H}{(y|y)_H}$ gilt

$$0 \leq (x|x)_H + \frac{|(x|y)_H|^2}{(y|y)_H} - 2\frac{|(x|y)_H|^2}{(y|y)_H} = (x|x)_H - \frac{|(x|y)_H|^2}{(y|y)_H}.$$

- $(x|x)_H \geq \frac{|(x|y)_H|^2}{(y|y)_H}$.

H Hilbertraum

Theorem. (M. Riesz & M.R. Fréchet 1907)
$\forall \phi \in H'$ $\exists | y_\phi \in H$ s.d.

$$\langle \phi, x \rangle = (x | y_\phi)_H \qquad \forall x \in H.$$

$\gamma : H \ni y_\phi \mapsto \phi \in H'$ ist ein isometrischer

- *Isomorphismus, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; bzw.*
- *anti-Isomorphismus (d.h., $\gamma(\alpha y_\phi) = \bar{\alpha} \gamma y_\phi$), falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Korollar.
Ist Y Unterraum von H, so stimmen $Y^\perp$ und Y° überein.

Beweis – 1

Z.z.: $\gamma : H \ni y \mapsto \gamma_y := (\cdot|y) \in H'$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

- Cauchy–Schwarz $\Rightarrow |\langle \gamma_y, x\rangle| = |(x|y)_H| \le \|y\|_H \|x\|_H$ und somit $\|\gamma_y\| \le \|y\|_H$.
- $\|\gamma_y x\|_H = \|y\|_H$ für $x := \frac{y}{\|y\|_H}$, da $\langle \gamma_y, x\rangle = \|y\|_H$.

Noch z.z.: γ ist surjektiv.

- Sei $\phi \in H'$ mit $\mathrm{Ker}\phi = H$. Damit ist $\phi = 0 = \gamma 0$.

Beweis – 2

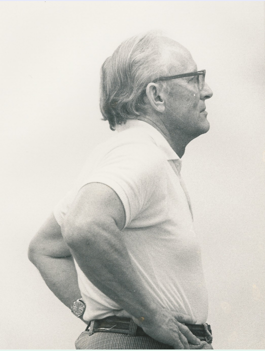
- Sei nun $\phi \in H'$ mit $\mathrm{Ker}\phi \neq H$, o.B.d.A. $\|\phi\| = 1$. Dann ist $H = \mathrm{Ker}\phi \oplus \mathrm{Ker}\phi^\perp$.
- $\mathrm{Ker}\phi^\perp$ ist ein abgeschlossener, 1-dimensionaler Unterraum, da $\phi_{|\mathrm{Ker}\phi^\perp}$ ein Isomorphismus ist.
- $\exists \xi \in \mathrm{Ker}\phi^\perp$, o.B.d.A. $\langle \phi, \xi \rangle = 1$, s.d. $\forall z \in \mathrm{Ker}\phi^\perp$ $z = \lambda\xi$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $x = \tilde{x} \oplus \lambda\xi \ \forall x \in H$.
- $\langle \phi, x \rangle = \langle \phi, \tilde{x} + \lambda\xi \rangle = \lambda \langle \phi, \xi \rangle = \lambda$
- $(x|\xi)_H = (\tilde{x} + \lambda\xi|\xi)_H = \lambda \|\xi\|_H^2$, da $\tilde{x} \perp \xi$.
- $\langle \phi, x \rangle = \lambda = \frac{(x|\xi)_H}{\|\xi\|_H^2} =: (x|y_\phi)_H \ \forall x \in H$.
- γ ist surjektiv.

Korollar.

Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Anmerkung.

Nicht trivial, da es einen Raum gibt (den James-Raum, R.C. James 1951), der isomorph zu seinem Bidual ist, ohne reflexiv zu sein.



Robert C. James (1918–)

Beweis

Z.z.: die kanonische Einbettung j ist surjektiv.

- Riesz–Fréchet $\Rightarrow$ der isometrischer (anti-)Isomorphismus γ definiert ein Skalarprodukt [ÜA] auf H' durch
$$(\psi|\phi)_{H'} := (\gamma^{-1}\phi|\gamma^{-1}\psi)_H.$$
- H' ist also ein Hilbertraum und für ihn gilt der Riesz–Fréchet.
- Ist $x'' \in H''$, so $\exists \phi \in H'$ s.d. $\forall \psi \in H'$
$$x''(\psi) = (\psi|\phi)_{H'}$$
- Somit ist $x''(\psi) = (\gamma^{-1}\phi|\gamma^{-1}\psi)_H =: (x|\gamma^{-1}\psi)_H$.
- Nach Definition gilt $(z|\gamma^{-1}\psi)_H = \langle \psi, z\rangle \ \forall z \in H$.
- Also $\exists x := \gamma^{-1}\phi \in H$ s.d. $x''(\psi) = \langle \psi, x\rangle$, d.h., $x'' = jx$.
- j ist also surjektiv.

X metrischer Raum, $M \subset X$

Definition.

- *M heißt kompakt, falls jedes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (in M) konvergente Teilfolge hat.*
- *M heißt relativ kompakt, falls $\overline{M}$ kompakt ist.*
- *M heißt präkompakt, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists M' \subset M$ s.d.*
  - *M' endlich*
  - *$M \subset \bigcup_{x\in M'} B_\epsilon(x)$.*

Anmerkung.

- *Ist M kompakt, so ist M abgeschlossen.*
- *Ist M präkompakt, so ist M beschränkt.*
- *Ist M abgeschlossen und X kompakt, so ist auch M kompakt.*
- *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt ist.*
- *Sei Y ein metrischer Raum. Sind $f : M \to Y$ stetig und M kompakt, so ist $f(M) \subset Y$ kompakt.*

Das Lemma von Riesz

X normierter Raum

Satz. (F. Riesz 1918)

Ist Y abg. Unterraum von X, $Y \neq \{0\}$ und $Y \neq X$, so gilt $\forall r < 1\ \exists x_{(r)} \in X$, $\|x_{(r)}\|_X = 1$, s.d. $\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X > r$.

Beweis.

- Sei $x \in X \setminus Y$. Y abgeschlossen $\Rightarrow \inf_{y\in Y} \|x - y\|_X > 0$.
- $\exists y_0 \in Y$ s.d. $\|x - y_0\| < \frac{\inf_{y \in Y} \|x-y\|}{r}$
- Sei $x_{(r)} := \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|_X}$, mit

$$\inf_{y\in Y} \|x_{(r)} - y\|_X = \inf_{y \in Y} \left\| \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|_X} - y \right\|_X = \frac{1}{\|x-y_0\|_X} \inf_{y\in Y} \|x - y_0 - y\|_X .$$

- Da $y_0 \in Y$ gilt

$$\inf_{y\in Y} \|x_{(r)} - y\|_X = \frac{1}{\|x-y_0\|_X} \inf_{y\in Y} \|x-y\|_X > r.$$

Das Lemma von Riesz

X normierter Raum

Satz. (F. Riesz 1918)

Ist Y abg. Unterraum von X, $Y \neq \{0\}$ und $Y \neq X$, so gilt $\forall r < 1\ \exists x_{(r)} \in X$, $\|x_{(r)}\|_X = 1$, s.d. $\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X > r$.

Beweis.

- Sei $x \in X \setminus Y$. Y abgeschlossen $\Rightarrow \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X > 0$.
- $\exists y_0 \in Y$ s.d. $\|x - y_0\| < \frac{\inf_{y \in Y} \|x-y\|}{r}$
- Sei $x_{(r)} := \frac{x-y_0}{\|x-y_0\|_X}$, mit

$$\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X = \inf_{y \in Y} \left\| \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|_X} - y \right\|_X = \frac{1}{\|x - y_0\|_X} \inf_{y \in Y} \|x - y_0 - y\|_X .$$

- Da $y_0 \in Y$ gilt

$$\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X = \frac{1}{\|x - y_0\|_X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X > r.$$

X normierter Raum

Satz.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i) $\overline{B_1(0)}$ *ist kompakt.*

(ii) *Ist* $C \subset X$ *beschränkt und abgeschlossen, so ist* C *kompakt.*

(iii) $X \simeq \mathbb{K}^n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

"$(i) \Rightarrow (iii)$"

- $\dim X < \infty$, **denn sonst** betrachte $x_1 \in X$ mit $\|x_1\|_X = 1$ und $Y_1 := \mathrm{span}\{x_1\} \neq X$ (da $\dim X = \infty$).
- Lemma von Riesz $\Rightarrow \exists x_2 \in X$ s.d. $\|x_2\|_X = 1$ und $\|\alpha_1 x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall \alpha_1 \in \mathbb{K}$. Betrachte $Y_2 := \mathrm{span}\{x_1, x_2\} \neq X$ (da $\dim X = \infty$).
- ...
- So kann man $x_n \in X$ wählen, s.d.

$$\|x_n\|_X \leq 1 \quad \text{und} \quad \|x_n - x_m\|_X \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge. $\lightning$

"$(ii) \Rightarrow (i)$" klar.
"$(iii) \Rightarrow (ii)$" klar.

K kompakter metrischer Raum

Anmerkung.

K ist vollständig, da jede Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt und somit selber konvergiert.

(K, d) metrischer Raum

Satz.
K ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.

Beweis "$\Rightarrow$"

- K ist vollständig, da kompakt.
- K ist präkompakt, **denn sonst** $\exists \epsilon > 0$ s.d. $K \not\subset \bigcup_{n=1}^{N} B_\epsilon(x_n)$ für beliebige endliche Familien $(B_\epsilon(x_k))_{1\le k\le N}$.
- Definiere also rekursiv eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ s.d. $y_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_\epsilon(y_k)$.
- Da K kompakt hat $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt y.
- $\exists n < m$ s.d. $d(y, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(y, y_m) < \frac{\epsilon}{2}$.
- Also $\epsilon \le d(y_n, y_m) \le d(y_n, y) + d(y, y_m) < \epsilon$. $\lightning$

Beweis “$\Leftarrow$”

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$.
- $\forall \epsilon > 0\ \exists y \in K$ s.d. $x_n \in B_\epsilon(y)$ für ∞ viele $n \in \mathbb{N}$.
- Definiere also rekursiv $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ und $J_k \subset \mathbb{N}$, J_k unendlich, s.d.

$$J_k \supset J_{k+1} \qquad \text{und} \qquad x_n \in B_{\frac{1}{k}}(y_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in J_k.$$

- Sei $\phi(k) :=$ k-tes Element von J_k, so dass $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend ist.
- $\phi(m) \in J_k\ \forall m \geq k$ und somit

$$d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(m)}) \leq d(x_{\phi(n)}, y_k) + d(y_k, x_{\phi(m)}) \leq \frac{2}{k} \qquad \forall k \leq n, m.$$

- $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy und somit, da X vollständig, konvergent.

X metrischer Raum, $M \subset X$

Korollar.

Ist M relativ kompakt, so ist M präkompakt.
Umgekehrt, sei X vollständig. Ist M präkompakt, so ist M relativ kompakt.

Beweis.

- Teilmengen präkompakten Mengen sind wieder präkompakt.
- M ist präkompakt $\Rightarrow$ $\overline{M}$ präkompakt $\Rightarrow$ $\overline{M}$ kompakt (da X vollständig).

□

X metrischer Raum, $M \subset X$

Korollar.

Ist M relativ kompakt, so ist M präkompakt.
Umgekehrt, sei X vollständig. Ist M präkompakt, so ist M relativ kompakt.

Beweis.

- Teilmengen präkompakten Mengen sind wieder präkompakt.
- M ist präkompakt $\Rightarrow \overline{M}$ präkompakt $\Rightarrow \overline{M}$ kompakt (da X vollständig).

$\square$

Der Satz von Heine–Borel

(X, d) metrischer Raum, $M \subset X$, I Menge

Theorem. (E. Borel 1895)

$M \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn $\forall (O_i)_{i\in I}$ s.d. $O_i \subset X$ offen $\forall i \in I$ und $M \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ $\exists J \subset I$ s.d.

- *J endlich*
- *$M \subset \bigcup_{j\in J} O_j$.*

"Für jede offene Überdeckung gibt es eine endliche Teilüberdeckung".

Beweis "$\Rightarrow$"

Es sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Es reicht z.z., dass

(*) $$\exists \epsilon > 0 \text{ s.d. } \forall x \in M\ \exists i \in I\ B_\epsilon(x) \subset O_i.$$

Da M präkompakt folgt dann, dass

$$\exists y_1, \ldots, y_N \in M \text{ s.d. } M \subset \bigcup_{k=1}^N B_\epsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^N O_{i_k}.$$

- $(*)$ gilt, **denn sonst** $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in M$ s.d. $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset O_i$.
- Betrachte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei x Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\exists i_0 \in I$ s.d. $x \in O_{i_0}$ und, da O_{i_0} offen, $\exists n \in \mathbb{N}$ s.d. $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset O_{i_0}$.
- $\forall N \geq n$ s.d. $d(x_N, x) \leq \frac{1}{n}$

$$B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset B_{\frac{1}{n}}(x_N) \subset B_{\frac{2}{n}}(x) \subset O_{i_0}. \qquad ↯$$

Beweis "$\Leftarrow$"

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt, **denn sonst** $\forall y \in X\ \exists \epsilon_y > 0$ s.d. $x_n \in B_{\epsilon_y}(y)$ nur für endlich viele n.
- $M \subset \bigcup_{y\in M} B_{\epsilon_y}(y)$ und somit $\exists y_1, \ldots, y_N \in M$ s.d. $M \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_{\epsilon_{y_k}}(y_k)$.
- Somit hätte die Folge nur endlich viele Folgenglieder. $\lightning$
- Also hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Teilfolge.

K kompakter metrischer Raum

Anmerkung.

K ist separabel, *da* $\forall n \in \mathbb{N}$ $K = \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{n}}(x)$ *und somit* $\exists x_1^n, \ldots, x_{N_n} \in K$ *s.d.* $K = \bigcup_{k=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_k)$*, also ist* $\{x_j^n \in K : n \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, N_n\}$ *dicht in* K*.*

Ist (K, d) kompakter metrischer Raum, so ist $(C(K), \| \cdot \|_\infty)$ ein Banachraum.

Definition.

- *$X \subset C(K)$ heißt gleichgradig stetig (oder gleichstetig) falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d.*

$$\forall f \in X\ d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

- *$X \subset C(K)$ heißt punktweise beschränkt, falls*

$$\forall x \in K \sup_{f \in X} |f(x)| < \infty.$$

Anmerkung.

Ist $Y \subset X$, X gleichgradig stetig bzw. punktweise beschränkt, so ist auch Y gleichgradig stetig bzw. punktweise beschränkt.

Der Satz von Ascoli–Arzelà

(K, d) kompakter metrischer Raum, $X \subset C(K)$

Theorem. (G. Ascoli 1883 & C. Arzelà 1895)

X ist genau dann gleichgradig stetig und punktweise beschränkt, wenn X relativ kompakt ist.

$(M, d_1), (N, d_2)$ metrische Räume, $f : M \to N$,

Definition.

f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; s.d. \; d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Lemma

Ist M kompakt, so ist jedes stetige $f : M \to N$ bereits gleichmäßig stetig.

Beweis des Lemma

- f ist gleichmäßig stetig, **denn sonst**

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n, y_n \in M \text{ s.d.}$$

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ aber } d_2(f(x_n) - f(y_n)) \geq \epsilon.$$

- Da M kompakt hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, etwa $x_{n_k} \to x$.
- Somit

$$d_2(f(x_{n_k}) - f(x)) \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oder} \quad d_2(f(y_{n_k}) - f(x)) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

- Aber $y_{n_k} \to x$ (Δ-Ungleichung).
- Deshalb $f(x_{n_k}) \to f(x)$ und $f(y_{n_k}) \to f(x)$, da f stetig. $\lightning$

Beweis "$\Rightarrow$"

- K separabel (da kompakt) $\Rightarrow \exists D := \{k_m : m \in \mathbb{N}\}$, dicht in K.
- $\forall (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X\ \forall m \in \mathbb{N}\ (f_n(k_m))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist beschränkt.
- Bolzano–Weierstraß $\Rightarrow (f_n(k_m))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist relativ kompakt.
- Diagonalfolgen-Argument $\Rightarrow \exists \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend mit
$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{n\in\mathbb{N}} f_{\phi(n)}(k_m).$$
- $\overline{D} = K \Rightarrow \forall k \in K\ \exists \lim_{n\in\mathbb{N}} f_{\phi(n)}(k)$.
- Grenzwertexistenz gleichmäßig in $k \Rightarrow \exists \lim_{n\in\mathbb{N}} f_{\phi(n)}$.

Beweis "$\Leftarrow$"

Es reicht z.z., dass X gleichgradig stetig ist, falls X kompakt ist, da kompakte Teilmengen immer beschränkt (und insb. punktweise beschränkt) sind.

- $\forall \epsilon > 0\ \exists f_1, \ldots, f_N \in C(K)$ s.d. $X \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_k)$, d.h.
$$\forall f \in X\ \exists j = 1, \ldots, N \text{ s.d. } \|f - f_j\| < \frac{\epsilon}{3}.$$
- $\forall x \in K\ \forall j = 1, \ldots, N\ \exists \delta_j > 0$ s.d.
$$y \in B_{\delta_j}(x) \Rightarrow |f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$
- Für $\delta := \min_{1 \leq j \leq N} \delta_j$ gilt $\forall y \in B_\delta(x)\ \forall f \in X$
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq \epsilon,$$
und somit ist X gleichgradig stetig.
- Ist X nicht abgeschlossen (also nur relativ kompakt), dann ist $\overline{X}$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt und somit auch X.

Kompakte Operatoren

X, Y normierte Räume

Definition. (F. Riesz 1918)

- *$T : X \to Y$ linear heißt **kompakt**, falls $T(B_1(0))$ relativ kompakt ist; oder äquivalent, falls T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet; oder äquivalent, falls T beschränkte Folgen auf Folgen abbildet, die eine konvergente Teilfolge besitzen.*
- *Der Raum der kompakten linearen Operatoren $T : X \to Y$ ist $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Anmerkung.

Da relativ kompakte Mengen beschränkt sind, ist jeder kompakte Operator auch beschränkt, d.h. $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

Idealeigenschaft der kompakten Operatoren

X, Y, Z Banachräume

Theorem.

- *$\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$ und somit ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*
- *Sind $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ mit S oder T kompakt, so ist auch $ST \in \mathcal{K}(X, Z)$.*
- *$\mathcal{K}(X)$ ist ein beidseitiges Ideal in $\mathcal{L}(X)$.*
- *$\mathcal{K}(X)$ ist eine Banachalgebra.*

Beweis.
[ÜA] □

X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ linear

Satz.

(1) *Ist X endlich-dimensional, so ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(2) *Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\operatorname{Rg} T$ endlich-dimensional, so ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

Beweis.

(1)

- T ist stetig.
- T bildet $\overline{B_1(0)}$ (kompakt) auf $T(\overline{B_1(0)})$ (notwendigerweise kompakt, da Bild einer kompakten Menge unter T stetig) ab.

(2)

- $\dim \operatorname{Rg} T < \infty \Rightarrow M \subset \operatorname{Rg} T$ ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt ist.
- T bildet beschränkte Mengen nach beschränkte Mengen ab (da T stetig).

□

X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ linear

Satz.

(1) *Ist X endlich-dimensional, so ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(2) *Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\operatorname{Rg} T$ endlich-dimensional, so ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

Beweis.

(1)

- T ist stetig.
- T bildet $\overline{B_1(0)}$ (kompakt) auf $T(\overline{B_1(0)})$ (notwendigerweise kompakt, da Bild einer kompakten Menge unter T stetig) ab.

(2)

- $\dim \operatorname{Rg} T < \infty \Rightarrow M \subset \operatorname{Rg} T$ ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt ist.
- T bildet beschränkte Mengen nach beschränkte Mengen ab (da T stetig).

$\square$

X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Korollar.

Gibt es $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *mit* $\operatorname{Rg} T_n$ *endlich-dimensional* $\forall n \in \mathbb{N}$ *und* $\|T_n - T\| \to 0$, *dann ist auch* $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Anmerkung.

Gibt es kompakte Operatoren, die *nicht* Grenzwert einer Familie von Operatoren mit endlich-dimensionalen Bildern sind?
Die Frage stammt aus S. Mazur 1936. Erst 1973 zeigte P. Enflo, dass solche kompakte Operatoren existieren.
Es gibt sogar kompakte Operatoren auf ℓ^2, *die diese Eigenschaft nicht haben.*

X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Korollar.

Gibt es $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\operatorname{Rg} T_n$ endlich-dimensional $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\|T_n - T\| \to 0$, dann ist auch $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Anmerkung.

Gibt es kompakte Operatoren, die *nicht* Grenzwert einer Familie von Operatoren mit endlich-dimensionalen Bildern sind?
Die Frage stammt aus S. Mazur 1936. Erst 1973 zeigte P. Enflo, dass solche kompakte Operatoren existieren.
Es gibt sogar kompakte Operatoren auf ℓ^2, die diese Eigenschaft nicht haben.

Vollstetige Operatoren

Definition.

Es seien X, Y normierte Räume. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt vollstetig, falls für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ die schwache Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Normkonvergenz von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert.

X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Satz.

(1) *Ist T kompakt, so ist T vollstetig.*

(2) *Ist X ein reflexiver Banachraum und T vollstetig, so ist T kompakt.*

Beweis von (1)

Man zeigt zuerst $Tx_n \rightharpoonup Tx$, dann $Tx_n \to Tx$.

- Ist $\phi \in Y'$, so sei $\psi := \phi \circ T \in X'$ definiert.
- $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \langle \psi, x_n \rangle \to \langle \psi, x \rangle \Rightarrow \langle \phi, Tx_n \rangle \to \langle \phi, Tx \rangle$, also $Tx_n \rightharpoonup Tx$ (da ϕ beliebig).
- $Tx_n \to Tx$, **denn sonst** $\exists \epsilon > 0\ \exists (Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \epsilon$.
- $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Rightarrow (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
- $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}}$, etwa $(Tx_{n_{k_h}}) \to \tilde{y}$.
- Somit $\tilde{y} = Tx$. $\lightning$

Beweis von (2)

Wir nehmen erstmal an, X sei separabel.

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_1(0)$.
- $B_1(0)$ ist schwach kompakt.
- Also $\exists x \in X\ \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ s.d. $x_{n_k} \rightharpoonup x$.
- T vollstetig $\Rightarrow Tx_{n_k} \to Tx$, d.h. T ist kompakt.

Im allgemeinen Fall:

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_1(0)$ und $X_1 := \overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.
- X_1 ist separabel und reflexiv.
- $T_{|X_1} : X_1 \to Y$ ist vollstetig, also kompakt.
- $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} = (T|_{X_1} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge.

(Ω, μ) ein Maßraum, $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$

Definition.

Der lineare Operator

$$T : f \mapsto \int_\Omega k(\cdot, x) f(x)\, d\mu$$

heißt Fredholmscher Intergraloperator mit Kern k.

Erik Ivar Fredholm (1866–1927)

Fundamentales Beispiel: Integraloperatoren

(K, d) kompakter metrischer Raum

Satz.
Ist der Kern $k \in C(K \times K)$, so ist der Fredholmsche Integraloperator

$$T : C(K) \ni f \mapsto \int_K k(\cdot, x) f(x)\, dx \in C(K)$$

ein kompakter Operator.

Beweisskizze:

- T ist linear auf $C(K)$.
- T ist beschränkt.
- $T(B_1(0))$ ist relativ kompakt.

Beweis des Satzes - 1

Es reicht z.z.:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall f \in C(K)$$
$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \le \epsilon \|f\|_\infty,$$

dann ist Tf stetig $\forall f \in C(K)$.

- Es gilt
$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &\le \int_K |k(x,z)f(z) - k(y,z)f(z)|dz \\ &\le \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x,z) - k(y,z)|dz. \end{aligned}$$
- $k \in C(K \times K) \Rightarrow k$ ist gleichmäßig stetig, also insbesondere $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.d.
$$\forall z \in K \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow |k(x,z) - k(y,z)| \le \epsilon.$$
- $d(x,y) < \delta \Rightarrow |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \le \epsilon \|f\|_\infty.$

Beweis des Satzes - 2

- T ist beschränkt, denn

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|Tf\|_\infty \\
&= \sup_{x\in K} \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |Tf(x)| \\
&\le \sup_{x\in K} \int_K |k(x,y)|dy \\
&\le \|k\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Noch z.z.: $T(B_1(0))$ ist relativ kompakt.

- Insbesondere ist $T(B_1(0))$ beschränkt.
- Schon bewiesen:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall f \in C(K)$$

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \le \epsilon \|f\|_\infty ,$$

also ist $T(B_1(0))$ gleichgradig stetig.
- Ascoli–Arzelà $\Rightarrow$ $T(B_1(0))$ ist relativ kompakt.

Beispiele nichtkompakter Operatoren

Beispiel.

- *Ist* $\dim X = \infty$*, so ist die Identität auf* X *nicht kompakt.*
- *Der Multiplikationsoperator* $T : C([0,1]) \ni f \mapsto \alpha f \in C([0,1])$ *ist nicht kompakt* $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- *Wir werden später zeigen:*
  Ist $q \in C([0,1])$*,* q *nicht konstant, so ist der Multiplikationsoperator* $T : C([0,1]) \ni f \mapsto q \cdot f \in C([0,1])$ *nicht kompakt.*

Beispiel: die Einbettungsoperatoren

Definition.

Sind X, Y normierte Räume, mit $Y \subset X$. Y ist in X stetig bzw. kompakt eingebettet, falls die kanonische Einbettung

$$j : Y \ni x \mapsto x \in X$$

ein stetiger bzw. kompakter Operator ist; also wenn die Einheitskugel von Y bzgl. $\|\cdot\|_X$ beschränkt bzw. relativ kompakt ist, $Y \hookrightarrow X$ bzw. $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Beispiel.

Seien I ein abgeschlossenes Intervall und $Y := C^k_b(I)$, $X := C^h_b(I)$. Dann ist die Einbettung $Y \hookrightarrow X$ $\forall h < k$

- *kompakt, falls I beschränkt,*
- *stetig und nicht kompakt, falls I unbeschränkt.*

[Details: ÜA]

Beispiel.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt,* $a \in \Omega$

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \exists L_f \geq 0 \textit{ s.d.} \\ |f(x) - f(y)| \leq L_f \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \ \forall x, y \in \Omega\}\,.\end{aligned}$$

$\mathrm{Lip}(\Omega)$ *ist ein Banachraum bzgl.*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := |f(a)| + \inf L_f\,.$$

Dann ist $B_1(0) \subset \mathrm{Lip}(\Omega)$ *kompakt in* $C(\Omega)$. *[Details: ÜA]*

Fundamentales Beispiel: der Satz von Pitt

Theorem. (H.R. Pitt 1936)

Für $1 \leq q < p < \infty$ ist jedes $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$ kompakt.

Beweis [nach S. Delpech 2009] - 1

O.b.d.A. $\|T\| = 1$.

- ℓ^p ist reflexiv. Es reicht also z.z., T ist vollstetig.
- Wegen Linearität reicht es z.z., dass T schwach-Nullfolgen auf Nullfolgen abbildet.
- Wir zeigen vorerst: Sind $z \in c_{00}$ und $(\tilde{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^r$ eine schwach-Nullfolge, so gilt

  $$(*) \qquad \limsup_{n\to\infty} \|z + \tilde{z}^n\|^r_{\ell^r} = \|z\|^r_{\ell^r} + \limsup_{n\to\infty} \|\tilde{z}^n\|^r_{\ell^r},$$

  da $\lim_{n\to\infty} \tilde{z}^n_m = 0 \ \forall m \in \operatorname{supp} z$.
- Da $\overline{c_{00}} = \ell^r$ und da jede Norm $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$ erfüllt, gilt $(*)\ \forall z \in \ell^r$.

Beweis [nach S. Delpech 2009] - 2

Man hat also

$$(*) \qquad \limsup_{n\to\infty} \|z+\tilde{z}^n\|^r_{\ell^r} = \|z\|^r_{\ell^r} + \limsup_{n\to\infty} \|\tilde{z}^n\|^r_{\ell^r},$$

- Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ schwach–Nullfolge. Z.z.: $\lim_{n\to\infty} \|Th_n\|_{\ell^q} = 0$.
- Sei $\epsilon \in (0,1)$. Dann $\exists x^\epsilon \in \ell^p$ mit $\|x^\epsilon\|_{\ell^p} = 1$ und $1-\epsilon < \|Tx^\epsilon\| \le 1$.
- Sei $t > 0$. $\|T\| = 1 \Rightarrow$

$$(1) \qquad \|Tx^\epsilon + T(th_n)\|_{\ell^q} \le \|x^\epsilon + th_n\|_{\ell^p}.$$

- $(*)$ angewandt an (1) für $z := Tx^\epsilon$, $\tilde{z}^n := T(th_n)$ und $r := q \Rightarrow$

$$(2) \qquad \limsup_{n\to\infty} \|Tx^\epsilon + T(th_n)\|^q_{\ell^q} = \|Tx^\epsilon\|^q_{\ell^q} + t^q \limsup_{n\to\infty} \|Th_n\|^q_{\ell^q}.$$

$(*)$ angewandt an (1) für $z := x^\epsilon$, $\tilde{z}^n := th_n$ und $r := p \Rightarrow$

$$(3) \qquad \limsup_{n\to\infty} \|x^\epsilon + th_n\|^p_{\ell^p} = \|x^\epsilon\|^p_{\ell^p} + t^p \limsup_{n\to\infty} \|h_n\|^p_{\ell^p}.$$

Beweis [nach S. Delpech 2009] - 3

Man hat also aus (2) & (3)

$$\left(\|Tx^\epsilon\|^q_{\ell^q} + t^q \limsup_{n\to\infty} \|Th_n\|^q_{\ell^q}\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\|x^\epsilon\|^p_{\ell^p} + t^p \limsup_{n\to\infty} \|h_n\|^p_{\ell^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Weil $\|x^\epsilon\|_{\ell^p} = 1$, $1 \ge \|Tx^\epsilon\|_{\ell^q} \ge 1-\epsilon$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (da schwach-konvergent) gilt

  $$\left((1-\epsilon)^q + t^q \limsup_{n\to\infty} \|Th_n\|^q_{\ell^q}\right)^{\frac{1}{q}} \le (1+M^p t^p)^{\frac{1}{p}},$$

  d.h.

  $$\limsup_{n\to\infty} \|Th_n\|^q_{\ell^q} \le t^{-q}\left((1+M^p t^p)^{\frac{q}{p}} - (1-\epsilon)^q\right).$$

- t ist noch beliebig. Für $t = \epsilon^{\frac{1}{p}}$ gilt

  $$\limsup_{n\to\infty} \|Th_n\|^q_{\ell^q} \quad\le\quad \epsilon^{-\frac{q}{p}}\left((1+M^p\epsilon)^{\frac{q}{p}} - (1-\epsilon)^q\right).$$

Beweis [nach S. Delpech 2009] - 4

$$\limsup_{n\to\infty} \| Th_n\|^q_{\ell^q} \quad \leq \quad \epsilon^{-\frac{q}{p}} \left((1+M^p\epsilon)^{\frac{q}{p}} - (1-\epsilon)^q \right).$$

- Taylor $\Rightarrow (1+x)^s \simeq 1 + sx + o(x)\ \forall s, x > 0$ und somit gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \| Th_n\|^q_{\ell^q} \quad \leq \quad \epsilon^{-\frac{q}{p}} \left(1 + \frac{q}{p} M^p \epsilon - (1-q\epsilon) + o(\epsilon) \right) \stackrel{\epsilon\to 0}{\to} 0.$$

- Also $0 \leq \limsup_{n\to\infty} \| Th_n\|^q_{\ell^q} \leq 0$.

Anmerkung.

Delpech bewies auch, dass jedes $T \in \mathcal{L}(c_0, \ell^q)$ ist kompakt $\forall q \in [1, \infty)$.

Dabei verwendet man, dass $\ell^1 = (c_0)'$ separabel ist und somit besitzt jede beschränkte Folge in c_0 eine schwach-Cauchy Teilfolge.
[Details: ÜA]

Adjungierte Operatoren

X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Definition.
Der zu T adjungierte Operator ist

$$T' : Y' \ni y' \mapsto T'y' \in X',$$

wobei

$$\langle T'y', x\rangle := \langle y', Tx\rangle, \qquad \forall x \in X.$$

Anmerkung.

- $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$
- $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S' \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
- $(TS)' = S'T'$, *falls* $S, T \in \mathcal{L}(X)$

Beispiel.

Identifiziert man $(\ell^p)' \simeq \ell^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *so findet man für den linken Shiftoperator*

$$K : \ell^p \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, \ldots) \in \ell^p$$

dass $K' \in \mathcal{L}((\ell^p)')$. *Ist weiter* $y' := \gamma_{(t_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, *also*

$$\langle y', (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n t_n,$$

so gilt

$$\langle y', K(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{n+1} t_n = \sum_{n=2}^{\infty} s_n t_{n-1} \stackrel{!}{=} \langle K'y', (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle,$$

also

$$K' : \ell^q \ni \gamma_{(x_1, x_2, \ldots)} \mapsto \gamma_{(0, x_1, \ldots)} \in \ell^q,$$

d.h., $K' = J$, *der rechte Shiftoperator.*

X normierter Raum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Lemma

Genau dann $\overline{(\lambda \mathrm{Id} - T)(X)} = X$, *wenn* $\lambda \,\mathrm{Id} - T'$ *injektiv.*

Beweis.

“$\Leftarrow$”

- Ist $\overline{(\lambda \mathrm{Id} - T)(X)} \neq X$, so Hahn–Banach $\Rightarrow \exists \phi \in X'$, $\phi \neq 0$, s.d. $\phi(\lambda x - Tx) = 0 \ \forall x \in X$.
- Also $\phi \circ T = \lambda \phi$, d.h., $T' \circ \phi = \lambda \phi$.

“$\Rightarrow$”

- Gelte $\overline{(\lambda \mathrm{Id} - T)(X)} = X$ und sei $\phi \in X'$ s.d. $T'\phi = \lambda\phi$.
- Es gilt $\phi((\lambda \,\mathrm{Id} - T)x) = (\lambda\phi - T'\phi)x$.
- $\forall x \in X \ \phi((\lambda \,\mathrm{Id} - T)x) = (\lambda\phi - T'\phi)(x) = 0$.
- Dichtheit von $(\lambda \mathrm{Id} - T)(X) \Rightarrow \phi \equiv 0$.

$\square$

Korollar.

Ist T surjektiv, so ist T' injektiv.

Lemma

Genau dann $\overline{(\lambda \mathrm{Id} - T)(X)} = X$, *wenn* $\lambda \, \mathrm{Id} - T'$ *injektiv.*

Beweis.

"$\Leftarrow$"

- Ist $\overline{(\lambda \mathrm{Id} - T)(X)} \neq X$, so Hahn–Banach $\Rightarrow \exists \phi \in X'$, $\phi \neq 0$, s.d. $\phi(\lambda x - Tx) = 0 \ \forall x \in X$.
- Also $\phi \circ T = \lambda \phi$, d.h., $T' \circ \phi = \lambda \phi$.

"$\Rightarrow$"

- Gelte $\overline{(\lambda \mathrm{Id} - T)(X)} = X$ und sei $\phi \in X'$ s.d. $T'\phi = \lambda \phi$.
- Es gilt $\phi((\lambda \, \mathrm{Id} - T)x) = (\lambda \phi - T'\phi)x$.
- $\forall x \in X \ \phi((\lambda \, \mathrm{Id} - T)x) = (\lambda \phi - T'\phi)(x) = 0$.
- Dichtheit von $(\lambda \mathrm{Id} - T)(X) \Rightarrow \phi \equiv 0$.

□

Korollar.

Ist T surjektiv, so ist T' injektiv.

X normierter Raum, $T \in \mathcal{L}(X)$.

Lemma

T ist genau dann invertierbar, wenn T' invertierbar ist.

Beweis.

"$\Rightarrow$"

- T invertierbar $\Rightarrow$ $(T^{-1})'T' = (T \circ T^{-1})' = \mathrm{Id} = (T^{-1} \circ T)' = T'(T^{-1})'$, also $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

"$\Rightarrow$"

- T' invertierbar $\Rightarrow$ T'' invertierbar.
- $\|Tx\| = \|T''j(x)\|| \geq \|(T'')^{-1}\|^{-1}\|j(x)\| = \|(T'')^{-1}\|^{-1}\|x\|$: T ist injektiv.
- Somit ist $\mathrm{Rg}\, T$ abgeschlossen.
- T' injektiv & $\overline{\mathrm{Rg}(T)} = \mathrm{Rg}(T) \Rightarrow \mathrm{Rg}(T) = X$, d.h. T ist surjektiv.

$\square$

X normierter Raum, $T \in \mathcal{L}(X)$.

Lemma

T ist genau dann invertierbar, wenn T' invertierbar ist.

Beweis.

“$\Rightarrow$”

- T invertierbar $\Rightarrow$ $(T^{-1})'T' = (T \circ T^{-1})' = \mathrm{Id} = (T^{-1} \circ T)' = T'(T^{-1})'$, also $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

“$\Rightarrow$”

- T' invertierbar $\Rightarrow$ T'' invertierbar.
- $\|Tx\| = \|T''j(x)\|| \geq \|(T'')^{-1}\|^{-1}\|j(x)\| = \|(T'')^{-1}\|^{-1}\|x\|$: T ist injektiv.
- Somit ist $\mathrm{Rg}\, T$ abgeschlossen.
- T' injektiv & $\overline{\mathrm{Rg}(T)} = \mathrm{Rg}(T) \Rightarrow \mathrm{Rg}(T) = X$, d.h. T ist surjektiv.

$\square$

Der Satz von Schauder

X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Theorem. (P.J. Schauder 1930)

T ist genau dann kompakt, wenn T' kompakt ist.

Beweis "$\Rightarrow$"

- $K := \overline{T(B_1(0))}$ ist ein kompakter metrischer Raum.
- Sei $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y'$ beschränkt. Dann definiert $\phi_n := {y'_n}_{|K}$ eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$.
- $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
- $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig stetig, da

$$|\langle \phi_n, z_1\rangle - \langle \phi_n, z_2\rangle| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|y'_k\| \|z_1 - z_2\|, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ z_1, z_2 \in X.$$

- Ascoli–Arzelà $\Rightarrow \exists\ (\phi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ glm. konv., also $\|\phi_{n_k} - \phi_{n_h}\|_\infty \to 0$.
- $\|T'y'_{n_k} - T'y'_{n_h}\| = \sup_{x\in B_1(0)} |\langle y'_{n_k}, Tx\rangle - \langle y'_{n_h}, Tx\rangle|$.
- Da $K = \overline{T(B_1(0))}$,

$$\|T'y'_{n_k} - T'y'_{n_h}\| = \sup_{x\in B_1(0)} |\langle y'_{n_k}, Tx\rangle - \langle y'_{n_h}, Tx\rangle| = \|\phi_{n_k} - \phi_{n_h}\|_\infty \to 0.$$

- Also konvergiert $(T'y'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Beweis "$\Leftarrow$"

- Nach "$\Rightarrow$" gilt: T' kompakt $\Rightarrow T'' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$ kompakt.
- $T'' \circ j_X = j_Y \circ T \in \mathcal{L}(X, Y'')$ [ÜA] ($j_Y : Y \to Y''$ kanonische Einbettung) $\Rightarrow \mathrm{Rg}(T'' \circ j) \subset \mathrm{Rg}\, j_Y$
- $j_Y : Y \to \mathrm{Rg}\, j_Y$ invertierbar mit beschränkter Inverse.
- $T = j_Y^{-1} T'' j_X$
- T'' kompakt & Idealeigenschaft $\Rightarrow T$ ist kompakt.

X Banachraum

Satz.
Ist $K \in \mathcal{K}(X)$ und $T := \mathrm{Id} - K$, so sind $\ker T$ *endlichdimensional und* $\operatorname{Rg} T$ *abgeschlossen.*

X normierter Raum

Lemma

Ist Y ein endlichdimensionaler Unterraum von X, so $\exists$ Z abgeschlossener Unterraum von X, so dass

$$X = Y \oplus Z.$$

Beweis.

- Sei $\{y_1, \dots, y_N\}$ Basis von Y. Betrachte $\forall i = 1, \dots, N$ $\phi_i \in Y'$ s.d. $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$.
- Hahn–Banach $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, N$ $\exists \Phi_i \in X'$ s.d. $\Phi_i|_Y = \phi_i$.
- $P := \sum_{i=1}^N \Phi_i(\cdot) y_i$.
- Dann ist $P \in \mathcal{L}(X)$, $P^2 = P$ und $\operatorname{Rg} P = Y$.
- $Z := (\mathrm{Id} - P)X = \ker P$ ist ein abgeschlossener Unterraum und $X = Y \oplus Z$.

$\square$

X normierter Raum

Lemma

Ist Y ein endlichdimensionaler Unterraum von X, so $\exists$ Z abgeschlossener Unterraum von X, so dass

$$X = Y \oplus Z.$$

Beweis.

- Sei $\{y_1, \dots, y_N\}$ Basis von Y. Betrachte $\forall i = 1, \dots, N$ $\phi_i \in Y'$ s.d. $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$.
- Hahn–Banach $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, N$ $\exists \Phi_i \in X'$ s.d. $\Phi_i|_Y = \phi_i$.
- $P := \sum_{i=1}^N \Phi_i(\cdot) y_i$.
- Dann ist $P \in \mathcal{L}(X)$, $P^2 = P$ und $\operatorname{Rg} P = Y$.
- $Z := (\mathrm{Id} - P)X = \ker P$ ist ein abgeschlossener Unterraum und $X = Y \oplus Z$.

$\square$

Beweis - 1

- $\ker T$ ist abgeschlossen und $Kx = x \ \forall x \in \ker T \Rightarrow \mathrm{Id}_{|\ker T}$ ist kompakt.
- Somit $\dim \ker T < \infty$.
- $\dim \ker T < \infty \Rightarrow X = \ker T \oplus Y$ für einen abg. Unterraum Y.
- $T_{|Y}$ ist injektiv mit $\operatorname{Rg} T = \operatorname{Rg} T_{|Y}$.

Noch z.z.: $y \in \overline{\operatorname{Rg} T} \Rightarrow y \in \operatorname{Rg} T$.

- Ist $y \in \overline{\operatorname{Rg} T}$, so $\exists \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit
$$x_n - Kx_n = Tx_n \to y.$$
- Es reicht z.z.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn dann hat $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Kx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (da K kompakt). Da aber
$$x_{n_k} - Kx_{n_k} \to y,$$
konvergiert auch $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Somit $Tx = x - Kx = y$ und $y \in \operatorname{Rg} T$.

Beweis - 2

Noch z.z.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

- **Denn sonst** $\exists\ (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $x_{n_k} \to \infty$.
- Für $w_{n_k} := \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ gilt
$$w_{n_k} - Kw_{n_k} \to 0$$
(da $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, also beschränkt ist, und somit $\frac{Tx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \to 0$).
- K kompakt $\Rightarrow \exists\ (w_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}}$ s.d. $Kw_{n_{k_h}}$ konvergiert, etwa gegen $w \in Y$.
- $w_{n_k} - Kw_{n_k} \to 0 \Rightarrow w_{n_{k_h}} \to w$, also $\|w\| = 1$.
- Somit $Tw = Kw - w = 0$ für $w \in Y$, obwohl $T_{|Y}$ injektiv. $\lightning$

X Banachraum

Satz.

Ist $K \in \mathcal{K}(X)$ und $T := \mathrm{Id} - K$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *T ist invertierbar;*

(ii) *T ist injektiv;*

(iii) *T ist surjektiv.*

Anmerkung.

Ist $K \in \mathcal{K}(X)$, so ist für jeden Isomorphismus $S \in \mathcal{L}(X)$ auch $S^{-1}K \in \mathcal{K}(X)$ und somit gilt der Satz auch für $(S - K) = S(\mathrm{Id} - S^{-1}K)$.

Beweis - 1

"(ii)⇒(iii)"

- T injektiv $\Rightarrow X_1 := \operatorname{Rg} T = T(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X.
- $X_1 = X$, **denn sonst** definiere rekursiv $X_n := T(X_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.
- X_n ist ein abgeschlossener Unterraum von X; $KX_n \subset X_n$ und $TX_n \subset X_n$.
- Weiter gilt $X_n \subsetneq X_{n+1}$ $\forall n$, denn $\exists y \in X \setminus TX$, also $y \neq Tx$ $\forall x \in X$ und daher $Ty \neq T^2x$ und $T^h y \neq T^{h+1}x$ $\forall x \in X$ (da T injektiv), also $T^n y \in X_n \setminus X_{n+1}$.
- Lemma von Riesz $\Rightarrow \exists u_n \in X_n$ s.d. $\|u_n\| = 1$ und $d(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$.
- $\forall m > n$ gilt dann $Tu_n + u_m - Tu_m \in X_{n+1}$ (da $u_n \in X_n$ und $u_m \in X_{n+1}$ mit X_{n+1} $(\mathrm{Id} - K)$-invariant).
- Somit

$$\|Ku_n - Ku_m\| = \|u_n - (Tu_n + u_m - Tu_m)\| \geq d(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

- Also hat $(Ku_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergent Teilfolge obwohl $\|u_n\| \leq 1$ $\forall n$ und $K \in \mathcal{K}(X)$. ↯.

Beweis - 2

“(iii)⇒(ii)”

- T surjektiv $\Rightarrow$ T' injektiv.
- $K \in \mathcal{K}(X)$ und Schauder $\Rightarrow$ $K' \in \mathcal{K}(X')$.
- “(ii)⇒(iii)” $\Rightarrow$ T' ist surjektiv, also invertierbar.
- T ist auch invertierbar.

Seien $K \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben.
Dann besagt der Satz, dass für die Gleichung

$$u - \lambda K u = f$$

die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $\exists$ genau eine Lösung $\forall f \in X$
- $\exists$ mindestens eine Lösung $\forall f \in X$
- $\exists$ höchstens eine Lösung $\forall f \in X$.

Die Fredholmsche Alternative

$K \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Korollar. (I.E. Fredholm 1900, T. Hildebrandt 1928)

Entweder hat

$$u - \lambda K u = f$$

für alle $f \in X$ *genau eine Lösung, oder hat*

$$u = \lambda K u$$

unendlich viele Lösungen.

Und für nichtkompakte Operatoren T?

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$

Definition. (D. Hilbert 1912)

Die Resolventemenge $\rho(T)$ ist die Menge

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \,\mathrm{Id} - T \text{ ist invertierbar } \}.$$

Ist $\lambda \in \rho(T)$, so heißt $R(\lambda, T) := (\lambda \,\mathrm{Id} - T)^{-1}$ Resolvente von T an der Stelle λ.
Das Spektrum $\sigma(T)$ ist die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Anmerkung.

Satz der beschränkten Inverse $\Rightarrow$
$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \,\mathrm{Id} - T \text{ ist Isomorphismus}\}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Beispiel.

Die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *hat keinen Eigenwert, falls* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, bzw.*
- *hat die Eigenwerte* $\pm i$*, falls* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*.*

Es lohnt sich, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu betrachten, um Trivialitäten zu meiden.

Eigenwerte

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Definition. (D. Hilbert 1904)

$\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von T, falls $\lambda \operatorname{Id} - T$ nicht injektiv ist, d.h. falls es einen Eigenvektor $x \neq 0$ gibt, s.d.

$$Tx = \lambda x.$$

Ist λ Eigenwert von T, so heißt $\ker(\lambda \operatorname{Id} - \mathrm{T})$ der mit λ assoziierte Eigenraum.
Die Menge der Eigenwerte von T heißt Punktspektrum von T, $\sigma_p(T)$.

Anmerkung.

- $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.
- $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ *falls* $\dim X < \infty$.
- *Ist* $\dim X = \infty$ *und T nicht kompakt, so kann es sein, dass* $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$*: z.B. ist für* $X = \ell^p$ *und J rechten Shiftoperator* $0 \in \sigma(J) \setminus \sigma_p(J)$.

Beispiele

- Sei 0 der Null-Operator auf X beliebig. Dann ist $\sigma_p(0) = \{0\}$, also ist X der einzige Eigenraum.
- Allgemein: Sei $\mu \in \mathbb{K}$. Dann ist $\sigma(\mu \operatorname{Id}) = \{\mu\}$.
- Ist $T \in \mathcal{L}(X)$, so ist $\sigma(T) = \sigma(T')$, denn T und somit $\lambda \operatorname{Id} - T$ ist genau dann invertierbar, wenn T' bzw. $(\lambda \operatorname{Id} - T)' = \lambda \operatorname{Id} - T'$ das ist.
- Sei $V : C([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^{\cdot} f(s)ds$, der Volterra-Operator. Dann ist $\sigma_p(V) = \emptyset$ (Beweis durch den verallgeinerten Fixpunktsatz von Banach) [Details: ÜA]

Zur Erinnerung

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.

- *$\sigma(T) \neq \emptyset$, $\sigma(T)$ ist kompakt, $\rho(T)$ ist offen.*
- *$\rho(T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(X)$ ist holomorph.*
- *$|\lambda| \leq \|T\|$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$. Insbesondere: Jede Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma(T)$ hat eine konvergente Teilfolge.*
- *$(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $r(T) := \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, den Spektralradius von T.*
- *Ist $\|T\| < 1$, so ist $1 \in \rho(T)$ und $(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} T^n$ (Neumann-Reihe).*

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Korollar.

Sind $\lambda_0 \in \rho(T)$ *und* $\mu \in \mathbb{C}$ *mit* $|\mu - \lambda_0|^{-1} > \|R(\lambda_0, T)\|$, *so ist* $\mu \in \rho(T)$ *und*

$$R(\mu, T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

Beweis.

- $\mu \operatorname{Id} - T = (\mu - \lambda_0) \operatorname{Id} + (\lambda_0 \operatorname{Id} - T) = (\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T))(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)$.
- $\|(\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T)\| < 1$ & Neumann-Reihe $\Rightarrow$

$$(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^n.$$

- Also ist $\mu \operatorname{Id} - T$ invertierbar und

$$R(\mu, T) = R(\lambda_0, T)(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

Korollar.

Sind $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda_0|^{-1} > \|R(\lambda_0, T)\|$, so ist $\mu \in \rho(T)$ und

$$R(\mu, T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

Beweis.

- $\mu \operatorname{Id} - T = (\mu - \lambda_0) \operatorname{Id} + (\lambda_0 \operatorname{Id} - T) = (\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T))(\lambda_0 \operatorname{Id} - T)$.
- $\|(\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T)\| < 1$ & Neumann-Reihe $\Rightarrow$
$$(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^n.$$
- Also ist $\mu \operatorname{Id} - T$ invertierbar und
$$R(\mu, T) = R(\lambda_0, T)(\operatorname{Id} - (\lambda_0 - \mu) R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Korollar.

$$\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))^{-1} \leq \|R(\lambda, T)\| \qquad \forall \lambda \in \rho(T).$$

Korollar.

Ist $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \rho(T)$ *s.d.* $\lambda_n \to \lambda_0$ *und* $\|R(\lambda_n, T)\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *so ist* $\lambda_0 \in \rho(T)$.

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Lemma

Sind $\lambda, \mu \in \rho(T)$, so gilt

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T).$$

Insbesondere

- *$R(\lambda, T), R(\mu, T)$ kommutieren;*
- *Ist $\mathcal{I}$ ein Operatorenideal und $R(\lambda, T) \in \mathcal{I}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist*

$$R(\mu, T) = R(\lambda, T) + (\lambda - \mu) R(\lambda, T) R(\mu, T) \in \mathcal{I}$$

für alle $\mu \in \rho(T)$.

Anmerkung.

Ist $\mathcal{I} = \mathcal{K}(X)$, so sagt man, dass T kompakte Resolvente hat. Ein $T \in \mathcal{L}(X)$ kann aber nicht kompakte Resolvente haben, sonst wäre $\mathrm{Id} = R(\lambda, T)(\lambda \,\mathrm{Id} - T) \in \mathcal{K}(X)$. ↯

Beweis

- $\lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T) = \mathrm{Id}$,
- $\big(\lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T)\big) R(\mu, T) = R(\mu, T)$ und $R(\lambda, T)\big(\mu R(\mu, T) - TR(\mu, T)\big) = R(\lambda, T)$.
- Somit

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= R(\lambda, T)\big(\mu R(\mu, T) - TR(\mu, T)\big) \\ &\quad -\big(\lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T)\big) R(\mu, T) \\ &= \mu R(\lambda, T) R(\mu, T) - TR(\lambda, T) R(\mu, T) \\ &\quad -\lambda R(\lambda, T) R(\mu, T) + TR(\lambda, T) R(\mu, T) \\ &= \mu R(\lambda, T) R(\mu, T) - \lambda R(\lambda, T) R(\mu, T). \end{aligned}$$

- Es gilt $R(\lambda, T)R(\mu, T) = (\mu - \lambda)^{-1}(R(\lambda, T) - R(\mu, T)) = (\lambda - \mu)^{-1}(R(\mu, T) - R(\lambda, T)) = R(\mu, T)R(\lambda, T)$.

X Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Theorem.
Ist $\dim X = \infty$, *so ist* $0 \in \sigma(T)$ *und jeder andere spektrale Wert ist ein Eigenwert. Weiter gilt:*
Entweder ist $\sigma(T)$ *endlich oder* $\exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ *s.d.* $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *und*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis - 1

- $0 \in \sigma(T)$, **denn sonst** wäre T Isomorphismus und somit $\mathrm{Id} = T^{-1}T \in \mathcal{K}(X)$ obwohl $\dim X = \infty$. $\lightning$
- Ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, so ist $(\mathrm{Id} - \lambda^{-1}T) = \lambda^{-1}(\lambda\,\mathrm{Id} - T)$ injektiv.
- Fredholmsche Alternative $\Rightarrow$ $(\mathrm{Id} - \lambda^{-1}T)$ ist ein Isomorphismus, also auch $\lambda\,\mathrm{Id} - T$, es sei denn, $\lambda = 0$.

Beweis - 2

- Dann gilt: $\forall \epsilon > 0$ ist $\sigma(T) \cap B_\epsilon(0)^C = \sigma_p(T) \cap B_\epsilon(0)^C$ endlich, **denn sonst** betrachte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma_p(T) \cap B_\epsilon(0)^C$.
- $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. O.b.d.A.: $\lambda_{n_h} \neq \lambda_{n_k}$ $\forall h \neq k$.
- Betrachte eine Folge von assoziierten Eigenvektoren $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
- $\forall N \in \mathbb{N}$ ist $\{e_{n_1}, \dots, e_{n_N}\}$ linear unabhängig.
- Sei $X_N := \mathrm{span}\{e_{n_1}, \dots, e_{n_N}\}$: Lemma von Riesz $\Rightarrow \exists u_N \in X_N$ s.d. $d(u_N, X_{N-1}) \geq \frac{1}{2}$, $\|u_N\| = 1$.
- $Tu_N - \lambda_{n_N} u_N \in X_{n_{N-1}}$, denn $Tu_N - \lambda_{n_N} u_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i Te_{n_i} - \lambda_{n_N}\alpha_i e_{n_i} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda_{n_i} - \lambda_{n_N})\alpha_i e_{n_i} \in X_{N-1}$.
- Also gilt $\forall h, k,\ 2 \leq k < h$

$$\|\lambda_{n_h}^{-1} Tu_{n_h} - \lambda_{n_k}^{-1} Tu_{n_k}\| = \|\lambda_{n_h}^{-1}(Tu_{n_h} - \lambda_{n_h} u_{n_h}) - \lambda_{n_k}^{-1} Tu_{n_k} + u_{n_h}\| \geq \frac{1}{2},$$

  da $(Tu_{n_h} - \lambda_{n_h} u_{n_h}) \in X_{h-1}$ und $\lambda_{n_k}^{-1} Tu_{n_k} \in X_k \subset X_{h-1}$.
- Somit hat $(Tu_{n_h})_{h\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge obwohl $T \in \mathcal{K}(X)$. $\lightning$

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$
I.A. ist $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$.

Definition.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt approximativer Eigenwert von T falls $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ s.d.

$$Tx_n - \lambda x_n \to 0.$$

Das approximative Punktspektrum von T, $\sigma_a(T)$, ist die Menge aller approximativen Eigenwerte von T.

Anmerkung.

*Also ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann **kein** approximativer Eigenwert, wenn*

$$\exists \alpha > 0 \text{ s.d. } \forall x \in X \ \|\lambda x - Tx\| \geq \alpha \|x\|.$$

Insbesondere:

- *Ist T eine Isometrie, so ist $0 \notin \sigma_a(T)$.*
- *Ist $\lambda \notin \sigma_a(T)$, so ist $\lambda \mathrm{Id} - T$ injektiv.*
- *Ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, so ist $\lambda \mathrm{Id} - T$ nicht surjektiv.*

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$

Satz.

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_a(T)$, *so ist* $\mathrm{Rg}(\lambda\,\mathrm{Id} - T)$ *abgeschlossen.*

Beweis.

- Ist $y = \lim_n(\lambda x_n - Tx_n) \in \overline{\mathrm{Rg}(\lambda\,\mathrm{Id} - T)}$, so ist

$$\alpha\|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda\,\mathrm{Id} - T)(x_n - x_m)\|.$$

- Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, etwa gegen x konvergent.
- Somit $y = \lim_n(\lambda x_n - Tx_n) = y = (\lambda x - Tx) \in \mathrm{Rg}(\lambda\,\mathrm{Id} - T)$.

$\square$

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$

Satz.

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_a(T)$, *so ist* $\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)$ *abgeschlossen.*

Beweis.

- Ist $y = \lim_n(\lambda x_n - Tx_n) \in \overline{\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)}$, so ist

$$\alpha \|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda \operatorname{Id} - T)(x_n - x_m)\|.$$

- Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, etwa gegen x konvergent.
- Somit $y = \lim_n(\lambda x_n - Tx_n) = y = (\lambda x - Tx) \in \operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)$.

$\square$

Anmerkung.

- $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$, *denn für* $\lambda \in \sigma_a(T)$ *ist* $\lambda \operatorname{Id} - T$ *kein Isomorphismus.*
- *I.A.* $\sigma_a(T) \neq \sigma(T)$, *denn für* $X = \ell^p(\mathbb{N})$ *und* K *rechten Shiftoperator ist* K *ist nicht surjektiv und somit* $0 \in \sigma(K)$ *aber* K *ist eine Isometrie und somit notwendigerweise* $0 \notin \sigma_a(K)$.

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.
$\sigma(T) = \sigma_p(T') \cup \sigma_a(T)$.

Beweis.

- Ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, so ist $\mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T)$ abgeschlossen.
- Notwendigerweise ist $\mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T) \neq X$ und somit $\overline{\mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T)} \neq X$.
- Somit $\lambda \in \sigma_p(T')$.

□

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.

$\sigma(T) = \sigma_p(T') \cup \sigma_a(T)$.

Beweis.

- Ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, so ist $\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)$ abgeschlossen.
- Notwendigerweise ist $\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T) \neq X$ und somit $\overline{\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)} \neq X$.
- Somit $\lambda \in \sigma_p(T')$.

$\square$

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.
$\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T)$.

Beweis.

- Ist $\lambda \in \partial\sigma(T)$, so $\exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \rho(T)$ s.d. $\lambda_n \to \lambda$ aber $\|R(\lambda_n, T)\| \to \infty$.
- Prinzip der glm. Beschr. $\Rightarrow \exists x \in X\ \exists(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\|R(\lambda_{n_k}, T)x\| \to \infty$.
- Sei $y_k := \frac{R(\lambda_{n_k}, T)x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|}$. Dann ist $\|y_k\| = 1\ \forall k \in \mathbb{N}$ und

$$\lambda y_{n_k} - T y_{n_k} = (\lambda - \lambda_{n_k}) y_{n_k} + \frac{x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|} \to 0.$$

- Also $\lambda \in \sigma_a(T)$.

$\square$

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.

$\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T)$.

Beweis.

- Ist $\lambda \in \partial\sigma(T)$, so $\exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \rho(T)$ s.d. $\lambda_n \to \lambda$ aber $\|R(\lambda_n, T)\| \to \infty$.
- Prinzip der glm. Beschr. $\Rightarrow \exists x \in X\ \exists (\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $\|R(\lambda_{n_k}, T)x\| \to \infty$.
- Sei $y_k := \frac{R(\lambda_{n_k}, T)x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|}$. Dann ist $\|y_k\| = 1\ \forall k \in \mathbb{N}$ und

$$\lambda y_{n_k} - T y_{n_k} = (\lambda - \lambda_{n_k}) y_{n_k} + \frac{x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|} \to 0.$$

- Also $\lambda \in \sigma_a(T)$.

$\square$

Beispiel: Spektrum von Multiplikationsoperatoren

K kompakter metrischer Raum, $q \in C(K)$, $K \neq \{0\}$

Satz.
$\sigma(M_q) = q(K) := \{q(x) \in \mathbb{C} : x \in K\}$.

Beweis.

- $(\lambda \operatorname{Id} - M_q)f = \lambda f - q \cdot f : K \ni x \mapsto \lambda f(x) - q(x)f(x) \in \mathbb{C}$.
- $\lambda \in \rho(M_q) \Leftrightarrow \forall g \in C(K)$

  $$\lambda f(x) - q(x)f(x) = g(x), \qquad x \in K,$$

  eindeutig lösbar ist.
- Da die Lösung notwendigerweise durch

  $$f : K \ni x \mapsto (\lambda - q(x))^{-1} g(x) \in \mathbb{K}$$

  gegeben ist, ist $\lambda \in \rho(M_q) \Leftrightarrow (\lambda - q(x)) \neq 0 \; \forall x \in K$, d.h., $\Leftrightarrow \lambda \notin q(K)$.

Beispiel: Spektrum von Multiplikationsoperatoren

K kompakter metrischer Raum, $q \in C(K)$, $K \neq \{0\}$

Satz.
$\sigma(M_q) = q(K) := \{q(x) \in \mathbb{C} : x \in K\}$.

Beweis.

- $(\lambda \operatorname{Id} - M_q)f = \lambda f - q \cdot f : K \ni x \mapsto \lambda f(x) - q(x)f(x) \in \mathbb{C}$.
- $\lambda \in \rho(M_q) \Leftrightarrow \forall g \in C(K)$

$$\lambda f(x) - q(x)f(x) = g(x), \qquad x \in K,$$

  eindeutig lösbar ist.
- Da die Lösung notwendigerweise durch

$$f : K \ni x \mapsto (\lambda - q(x))^{-1} g(x) \in \mathbb{K}$$

  gegeben ist, ist $\lambda \in \rho(M_q) \Leftrightarrow (\lambda - q(x)) \neq 0 \ \forall x \in K$, d.h., $\Leftrightarrow$ $\lambda \notin q(K)$.

Nichtkompaktheit von Multiplikationsoperatoren

K kompakter metrischer Raum

Korollar.
Ist $q \in C(K)$ nicht konstant, so ist M_q nicht kompakt.

Beweis.

- Ist q nicht konstant, so ist $q(K)$ nicht abzählbar.
- Da $\sigma(M_q) = q(K)$ kann der Operator nicht kompakt sein.

□

Korollar.
Ist $q \in C(K)$, so ist M_q nicht kompakt.

Nichtkompaktheit von Multiplikationsoperatoren

K kompakter metrischer Raum

Korollar.
Ist $q \in C(K)$ nicht konstant, so ist M_q nicht kompakt.

Beweis.

- Ist q nicht konstant, so ist $q(K)$ nicht abzählbar.
- Da $\sigma(M_q) = q(K)$ kann der Operator nicht kompakt sein.

$\square$

Korollar.
Ist $q \in C(K)$, so ist M_q nicht kompakt.

Weitere Teile vom Spektrum

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$

Definition.

- *Das kontinuierliche Spektrum ist die Menge*

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda \operatorname{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \overline{\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)} = X\}.$$

- *Das Residualspektrum ist die Menge*

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda \operatorname{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \overline{\operatorname{Rg}(\lambda \operatorname{Id} - T)} \neq X\}.$$

Also gilt:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \,\dot\cup\, \sigma_c(T) \,\dot\cup\, \sigma_r(T).$$

Beispiel.

Für $X = \ell^2$ und J den rechten Shiftoperator gilt

- $\sigma(J) = \overline{B_1(0)}$,
- $\sigma_p(J) = \emptyset$,
- $\sigma_c(J) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$, *denn für $|\lambda| = 1$ lassen sich die Basisvektoren $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch Elemente von $\mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - J)$ approximieren und dann kann man für jedes $y \in \ell^2$ ein $x \in c_{00}$ angeben, für den $(\lambda \,\mathrm{Id} - J)x = y$.*
- $\sigma_r(J) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$, *denn für $|\lambda| < 1$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\bar{\lambda}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \perp \mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - J)$ und somit $\overline{\mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - J)} \neq X$.*

[Details: ÜA]

Beispiel.

Der Ortsoperator

$$f \mapsto \mathrm{id} \cdot f$$

hat

- *reines Punktspektrum als Operator auf* $B([0,1])$ *und*
- *reines Residualspektrum als Operator auf* $C([0,1])$.

[Details: ÜA]

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$

Satz.

$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

Beweis.

"$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T')$"

- Sei $\lambda \in \sigma_r(T)$, also sei $\overline{\mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - T)} \neq X$.
- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists \phi \in X' \setminus \{0\}$ mit $\langle \phi, y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - T)$, also

$$\langle (\lambda \,\mathrm{Id} - T')\phi, x \rangle = \langle \phi, (\lambda \,\mathrm{Id} - T)x \rangle = 0, \qquad \forall x \in X.$$

- Also $\lambda \in \sigma_p(T')$.

"$\sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$"

- Sei $\lambda \in \sigma_p(T')$, also sei $\langle \lambda\phi - T'\phi, x \rangle = \langle \phi, \lambda x - Tx \rangle = 0$ für ein $\phi \in X'$, $\phi \neq 0$, $\forall x \in X$.
- Entweder ist $\mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - T)$ nicht dicht in X, d.h., $\lambda \in \sigma_r(T)$, oder, falls $\mathrm{Rg}(\lambda \,\mathrm{Id} - T)$ dicht in X ist, dann ist $\lambda x - Tx = 0$ und somit $\lambda \in \sigma_p(T)$, **denn sonst** wäre $\phi = 0$. ↯

X Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$

Satz.

$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

Beweis.

"$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T')$"

- Sei $\lambda \in \sigma_r(T)$, also sei $\overline{\mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T)} \neq X$.
- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists \phi \in X' \setminus \{0\}$ mit $\langle \phi, y \rangle = 0 \; \forall y \in \mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T)$, also

$$\langle (\lambda \, \mathrm{Id} - T')\phi, x \rangle = \langle \phi, (\lambda \, \mathrm{Id} - T)x \rangle = 0, \qquad \forall x \in X.$$

- Also $\lambda \in \sigma_p(T')$.

"$\sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$"

- Sei $\lambda \in \sigma_p(T')$, also sei $\langle \lambda\phi - T'\phi, x \rangle = \langle \phi, \lambda x - Tx \rangle = 0$ für ein $\phi \in X'$, $\phi \neq 0$, $\forall x \in X$.
- Entweder ist $\mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T)$ nicht dicht in X, d.h., $\lambda \in \sigma_r(T)$, oder, falls $\mathrm{Rg}(\lambda \, \mathrm{Id} - T)$ dicht in X ist, dann ist $\lambda x - Tx = 0$ und somit $\lambda \in \sigma_p(T)$, **denn sonst** wäre $\phi = 0$. ↯

Lebesgue-Integration

(Ω, μ) Maßraum
Zur Erinnerung:

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, dann gilt:

- f ist genau dann integrierbar, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, wenn $\int_\Omega |f| d\mu < \infty$.
- $\int_\Omega |f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-f.ü.
- f ist monotoner Grenzwert einer Folge einfacher messbaren Funktionen.

Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so betrachte einfach $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(Ω, μ) Maßraum
Ferner gilt:

- **Satz der monotonen Konvergenz** oder **von Beppo Levi:** Seien $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $f_n \leq f_{n+1}$ μ-f.ü., $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0, +\infty]$. Dann ist f messbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

- **Lemma von Fatou:** Seien $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ μ-f.ü., $\forall n \in \mathbb{N}$. So ist f messbar und

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega f \, d\mu.$$

- **Satz der dominierten Konvergenz** oder **von Lebesgue:** Seien $f_n : \Omega \to (-\infty, \infty]$ integrierbar mit $|f_n| \leq g$ μ-f.ü., $\forall n \in \mathbb{N}$, für ein $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. gegen $f : \Omega \to (-\infty, \infty]$ messbar, so ist f integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Lebesgue-Integration

(Ω, μ) Maßraum

- Die Abbildung

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu \in \mathbb{K}$$

  ist linear.
- Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, so gilt

$$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$$

- Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ mit $f \leq g$ μ-f.ü., so gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu.$$

- Für $\Omega = \mathbb{R}^N$ und μ Lebesguemaß ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \mu)$.

$\mathcal{L}^p$-Räume

(Ω, μ) Maßraum

Definition.

Für $p \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \\ \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \textit{ messbar s.d. } \|f\|_p < \infty\}. \end{aligned}$$

Anmerkung.

- *Lebesgue-Integrale einer Funktion bzgl. einem allgemeinen Maß! ℓ^p-Räume sind somit ein Spezialfall.*
- $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow f^p \in \mathcal{L}^1$.

(Ω, μ) Maßraum

Satz.

Für alle $p \in (0, \infty)$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ ein Vektorraum.

Beweis.

- Sind f, g messbar, so ist $|f+g|^p$ messbar.
- Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f+g|^p d\mu &\leq \int_\Omega (|f|+|g|)^p d\mu \\
&\leq \int_\Omega (2\max\{|f|,|g|\})^p d\mu \\
&= 2^p \int_\Omega (\max\{|f|,|g|\})^p d\mu \\
&\leq 2^p \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu \\
&= 2^p (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.
\end{aligned}$$

- Analog zeigt man $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

(Ω, μ) Maßraum

Satz.

Für alle $p \in (0, \infty)$ ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ ein Vektorraum.

Beweis.

- Sind f, g messbar, so ist $|f+g|^p$ messbar.
- Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |f+g|^p d\mu &\leq \int_\Omega (|f|+|g|)^p d\mu \\
&\leq \int_\Omega (2\max\{|f|,|g|\})^p d\mu \\
&= 2^p \int_\Omega (\max\{|f|,|g|\})^p d\mu \\
&\leq 2^p \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu \\
&= 2^p (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.
\end{aligned}
$$

- Analog zeigt man $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

$\mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^q$

I.A. ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \neq \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$ falls $p \neq q$, $p, q \in (1, \infty)$.

- $$x \mapsto x^{\epsilon - 1}$$

  ist integrierbar $\forall \epsilon > 0$, aber nicht integrierbar $\forall \epsilon \leq 0$. Somit sieht man, dass

  $$x \mapsto x^{-\frac{1}{q}}$$

  in $\mathcal{L}^p(0,1) \setminus \mathcal{L}^q(0,1)$ liegt $\forall p < q$.

- $$x \mapsto (x \log^2(x/2))^{-1}$$

  liegt in $\mathcal{L}^1(0,1) \setminus \mathcal{L}^q(0,1)$ für alle $q > 1$.

$\mathcal{L}^\infty$-Raum

(Ω, μ) Maßraum

Definition.

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &:= \inf\{c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c \; \mu - f.ü.\} \\
&= \inf_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |f(x)|, \\
\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar s.d. } \|f\|_\infty < \infty\}.
\end{aligned}$$

(Ω, μ) Maßraum

Lemma

Genau dann ist $f \in \mathcal{L}^\infty$, wenn

$$f(x) \leq \|f\|_\infty \quad \mu - f.ü.$$

D.h., tatsächlich ist

$$\|f\|_\infty = \min_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \|f|_{\Omega \setminus A}\|.$$

Beweis.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := \{x \in \Omega : f(x) \geq \|f\|_\infty + \frac{1}{k}\}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mu(A_k) = 0$.
- $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$, wobei

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x \in \Omega : f(x) > \|f\|_\infty\}.$$

(Ω, μ) Maßraum

Lemma

Genau dann ist $f \in \mathcal{L}^\infty$, wenn

$$f(x) \leq \|f\|_\infty \quad \mu - f.ü.$$

D.h., tatsächlich ist

$$\|f\|_\infty = \min_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \|f|_{\Omega \setminus A}\|.$$

Beweis.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := \{x \in \Omega : f(x) \geq \|f\|_\infty + \frac{1}{k}\}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mu(A_k) = 0$.
- $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$, wobei

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x \in \Omega : f(x) > \|f\|_\infty\}.$$

□

Anmerkung.

- $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *μ-f.ü., und somit ist* $\|\cdot\|_\infty$ *keine Norm.*
- *Allerdings ist* $\|\cdot\|_\infty$ *homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung. [ÜA]*

(Ω, μ) Maßraum

Satz.

$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein Vektorraum.

Beweis.

- Sind f, g messbar, so ist $f + g$ messbar.
- Gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ und $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ μ-f.ü., so ist $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$ μ-f.ü.
- Gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ-f.ü., so ist $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_\infty < \infty$ μ-f.ü.

$\square$

Anmerkung.

Ist $f \in C([0,1]) \subset \mathcal{L}^\infty(0,1)$, so stimmen die $\mathcal{L}^\infty$-Norm und die $C([0,1])$-Norm von f überein.

(Ω, μ) Maßraum

Satz.

$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein Vektorraum.

Beweis.

- Sind f, g messbar, so ist $f + g$ messbar.
- Gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ und $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ μ-f.ü., so ist $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$ μ-f.ü.
- Gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ-f.ü., so ist $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_\infty < \infty$ μ-f.ü.

$\square$

Anmerkung.

Ist $f \in C([0,1]) \subset \mathcal{L}^\infty(0,1)$, so stimmen die $\mathcal{L}^\infty$-Norm und die $C([0,1])$-Norm von f überein.

Höldersche Ungleichung

(Ω, μ) Maßraum, $f, g : \Omega \to \mathbb{K} \cup \{+\infty\}$ messbar

Lemma (L.J. Rogers 1888, O. Hölder 1889)

Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt

$$(*) \qquad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

(Diese Ungleichung wird zu einer Gleichung, falls $|g| = \alpha |f|^{\frac{p-1}{1}}$ für ein $\alpha \geq 0$).

Beweis - 1

Erst für $p \in (1, \infty)$

- $f \cdot g$ ist messbar.
- Klar falls $\|f\|_p = +\infty$ oder $\|g\|_q = +\infty$.
- Klar für alle f, g, falls $(*)$ für $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ gilt.
- Also z.z.: $(*)$ für alle $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar mit $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.
- Da $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q \ \forall a, b \geq 0$ (schon bekannt), gilt auch (mit $a := |f(x)|$ und $b := |g(x)|$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)||g(x)| \, d\mu(x) &\leq p^{-1}\int_\Omega |f(x)|^p d\mu + q^{-1}\int_\Omega |g(x)|^q d\mu \\ &= p^{-1} + q^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Beweis - 2

Nun zu $p = 1$, $q = \infty$ (oder analog zu $q = 1$ und $p = \infty$)

- $f \cdot g$ ist messbar.
- Ist $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$, so gilt $\int_\Omega |f\ g| d\mu = \int_{\Omega \setminus A} |f\ g| d\mu$.
- Somit gilt $\forall A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f\ g| d\mu &\leq \left(\int_{\Omega \setminus A} |f|\ d\mu \right) \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)| \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|\ d\mu \right) \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)| \\ &= \|f\|_1 \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)|. \end{aligned}$$

- Schließlich

$$\int_\Omega |f\ g| d\mu \leq \|f\|_1 \inf_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A) = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)| = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung

(Ω, μ) Maßraum, $f_1, \ldots, f_n : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ messbar

Korollar.
Für $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ mit $p_1^{-1} + \ldots + p_n^{-1} = 1$ gilt

$$\|f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \ldots \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$

Beweis.
[ÜA] $\square$

$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^r$

(Ω, μ) Maßraum, $p, r \in [1, \infty]$

Korollar.
Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \subset \mathcal{L}^r(\Omega, \mu)$ für alle $p \geq r$.

Beweis.

- Sind $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und $g :\equiv 1 \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$ mit $q^{-1} = r^{-1} - p^{-1}$
- $\|f\|_r = \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p < \infty.$

$\square$

Anmerkung.
Ist $\mu(\Omega) = \infty$, so gilt diese Inklusion nicht.

$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^r$

(Ω, μ) Maßraum, $p, r \in [1, \infty]$

Korollar.

Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \subset \mathcal{L}^r(\Omega, \mu)$ für alle $p \geq r$.

Beweis.

- Sind $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und $g :\equiv 1 \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$ mit $q^{-1} = r^{-1} - p^{-1}$
- $\|f\|_r = \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p < \infty$.

□

Anmerkung.

Ist $\mu(\Omega) = \infty$, so gilt diese Inklusion nicht.

Minkowskische Ungleichung

(Ω, μ) Maßraum, $f, g : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ messbar

Korollar. (H. Minkowski 1896)

Für $p \in [1, \infty]$ *gilt* $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$.

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis.

[ÜA] □

$\Rightarrow \|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ erfüllt die Dreiecksungleichung $\forall p \in [1, \infty]$.

Lemma

Ist $f \in \bigcap_{1 \le p \le \infty} \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, so gilt

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Beweis.
[ÜA] $\square$

Lemma

Ist $f \in \bigcap_{1\le p\le\infty} \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, *so gilt*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

Beweis.

[ÜA] □

$\|\cdot\|_p$ definiert *keine* Norm auf $\mathcal{L}^p$, denn $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0$. Es kann sein, dass $f \neq 0$ auf einer Nullmenge.

Idee: Betrachte Funktionen bis auf Ihre Werte auf Nullmengen.

Quotientenräume

X Banachraum, Y abgeschlossener Unterraum von X

Satz.

$$\|[x]\|_{X/_Y} := \|x+Y\|_X = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\}, \qquad x \in {}^X/_Y$$

definiert eine Norm und der Quotientenraum ${}^X/_Y$ *ist ein Banachraum bzgl. dieser Norm.*

Idee: Definiere $L^p(\Omega,\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)}/_N$, wobei $N := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f = 0 \ \mu - \text{f.ü.}\}$.

Problem: $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ ist kein normierter Raum.

Quotientenräume

X Banachraum, Y abgeschlossener Unterraum von X

Satz.

$$\|[x]\|_{X/_Y} := \|x+Y\|_X = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\}, \qquad x \in {}^X/_Y$$

definiert eine Norm und der Quotientenraum ${}^X/_Y$ ist ein Banachraum bzgl. dieser Norm.

Idee: Definiere $L^p(\Omega,\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)}/_N$, wobei
$N := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f = 0\ \mu - \text{f.ü.}\}$.
Problem: $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ ist kein normierter Raum.

Halbnormen

X Vektorraum

Definition.
Eine Halbnorm $\|\cdot\|$ auf X ist $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ s.d.

(1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}$

$(X, \|\cdot\|)$ *heißt dann halbnormierter Raum.*

Es folgt aus der Minkowskischen Ungleichung:

Korollar.
$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ *ist ein halbnormierter Vektorraum* $\forall p \in [1, \infty]$.

Jedoch:
$(X, \|\cdot\|)$ halbnormierter Raum,
$N := \ker \|\cdot\| = \{x \in X : \|x\| = 0\}$

Satz.

$$\|[x]\|_{X/N} := \|x + N\|_X = \inf\{\|x + y\| : y \in N\}, \qquad x \in X/N$$

definiert eine Norm. Der Quotientenraum X/N ist ein Banachraum bzgl. dieser Norm, falls X vollständig ist.

Lemma

$|||[\cdot]|||$ *ist wohl definiert und*

$$\|[x]\| = \|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Beweis.

- $[x] = [z]$ für $x, z \in X \Rightarrow x = z + y_0$ für ein $y_0 \in N$, also

$$\|[x]\| = \inf\{\|x+y\| : y \in N\} = \inf\{\|z+y\| : y \in N\} = \|[z]\|.$$

- $\|[x]\| \leq \|x + 0\| = \|x\|$.
- $\forall y \in N$

$$\|x\| \leq \|x+y\| + \|y\| = \|x+y\|$$

und somit

$$\|x\| \leq \inf\{\|x+y\| : y \in N\} = \|[x]\|.$$

□

Lemma

$\|[\cdot]\|$ *ist wohl definiert und*

$$\|[x]\| = \|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Beweis.

- $[x] = [z]$ für $x, z \in X \Rightarrow x = z + y_0$ für ein $y_0 \in N$, also
$$\|[x]\| = \inf\{\|x+y\| : y \in N\} = \inf\{\|z+y\| : y \in N\} = \|[z]\|.$$
- $\|[x]\| \leq \|x + 0\| = \|x\|$.
- $\forall y \in N$
$$\|x\| \leq \|x+y\| + \|y\| = \|x+y\|$$
und somit
$$\|x\| \leq \inf\{\|x+y\| : y \in N\} = \|[x]\|.$$

$\square$

Beweis

- **Positive Definitheit:** Ist $x \in X$ mit $\|[x]\| = 0$, so gilt $\|x\| = 0$ und somit $x \in N$, d.h. $[x] = [0]$.
- **Homogenität:** klar für $\lambda = 0$ und für $\lambda \neq 0$ und $x \in X$ gilt

$$\|[\lambda x]\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = |\lambda|\|[x]\|.$$

- **Dreiecksungleichung:** Seien $x, z \in X$, so gilt

$$\|[x] + [z]\| = \|x + z\| \leq \|x\| + \|z\| = \|[x]\| + \|[z]\|.$$

- **Vollständigkeit:** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ s.d. $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist, so ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy.
- X vollständig $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\exists x \in X$ mit $\|x_n - x\| \to 0$ und somit $\|[x_n] - [x]\| = \|[x_n - x]\| = \|x_n - x\| \to 0$.

Lebesgue-L^p-Räume, $0 < p < \infty$

(Ω, μ) Maßraum, $p \in (0, \infty)$
Sei

$$\begin{aligned} N_p &:= \ker \|\cdot\|_p \\ &= \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) : \|f\|_p = 0\} \end{aligned}$$

Definition.

$$L^p(\Omega, \mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)}/_{N_p}.$$

Henri Léon Lebesgue
(1875–1941)

Anmerkung.

Ist $p \in (0,1)$, so erfüllt $\|\cdot\|_p$ die Minkowskische Ungleichung (d.h. die Dreiecksungleichung) nicht.
$\|\cdot\|_p$ ist somit keine Norm.
Allerdings definiert

$$d_p(f,g) := \|f-g\|_p$$

auch für $p \in (0,1)$ eine Metrik.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen

$L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mu)$ mit $\mu \equiv \lambda$ Lebesgue-Maß.

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f|_\omega \in L^p(\omega)\ \forall \omega \subset \Omega \text{ kompakt}\}.$$

- L^p_{loc} ist ein Vektorraum, aber kein normierter Raum.
- $L^p(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ \forall p \in [1, \infty]$.

Der Satz von Riesz–Fischer

(Ω, μ) Maßraum

Satz.
Für alle $p \in (0, \infty]$ ist $L^p(\Omega, \mu)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Korollar.
Für alle $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, \mu)$ ein Banachraum.

Wir zeigen, dass $\mathcal{L}^p$ vollständig ist, $\forall p \in [1, \infty]$.
Idee: Betrachte eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p$, betrachte die Folgen ihrer punkweisen Auswertungen und nutze die Vollständigkeit von $\mathbb{K}$.

Problem: Die Folgen der Auswertungen müssen nicht überall konvergieren.

Beweis für $p \in [1, \infty)$ - 1

- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ eine Cauchy-Folge.

  Es reicht z.z., $\exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.
- Somit $\exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ Cauchy, etwa mit
$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

  Z.z.: $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$.
- Sei
$$g_m : \Omega \ni x \mapsto \sum_{k=1}^m |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty).$$
  Dann ist g_n messbar, $\forall n \in \mathbb{N}$, und $g_n \leq g_{n+1}$.
- Da $\|g_m\|_p \leq \sum_{k=1}^m 2^{-k} < 1$ ist $g_m \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ $\forall m \in \mathbb{N}$.
- Sei
$$g(x) := \sup_{m\in\mathbb{N}} (g_m(x))_{n\in\mathbb{N}} \in [0, +\infty].$$
  Beppo Levi $\Rightarrow g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, mit $g(x) \in [0, \infty)$ μ-f.ü.

  g kann als dominierende Funktion dienen, um Lebesgue anzuwenden.

Beweis für $p \in [1, \infty)$ - 2

- Für $n_h \geq n_k \geq 2$ gilt
$$\begin{aligned} |f_{n_h}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_h}(x) - f_{n_{h-1}}(x)| + \ldots + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\ &= \sum_{\ell=k}^{h-1} |f_{n_{\ell+1}}(x) - f_{n_\ell}(x)| \\ &\leq g(x) - g_{k-1}(x). \end{aligned}$$
- $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge μ-f.ü.
- Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, etwa gegen $f(x) \in [0, +\infty)$ μ-f.ü.
- f ist punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen $\Rightarrow$ f ist messbar und $\forall h \in \mathbb{N}$
$$|f_{n_h}(x) - f(x)| \leq g(x) - g_{h-1}(x) \leq g(x) \qquad \mu - \text{f.ü.}$$
- Somit für h groß
$$|f_{n_h}(x) - f(x)|^p \leq g(x)^p \qquad \mu - \text{f.ü.}$$
- $|f| \leq |f - f_{n_h}| + |f_{n_h}|$, also $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$.
- Da $|f_{n_h}(x) - f(x)|^p \to 0$ und $|f_{n_h} - f|^p \leq g^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, Lebesgue $\Rightarrow$ Aussage.

Beweis für $p = \infty$

- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ eine Cauchy-Folge.
- $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N_k \in \mathbb{N}$ s.d.
$$\|f_n - f_m\|_\infty \le \frac{1}{k} \qquad \forall m,n \ge N_k.$$
- Somit $\exists A_k$ mit $\mu(A_k) = 0$ s.d.
$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{1}{k} \qquad \forall m,n \ge N_k,\ \forall x \in \Omega \setminus A_k.$$
- Auch für $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ gilt $\mu(A) = 0$ und $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ ist eine Cauchy-Folge, $\forall x \in \Omega \setminus A$.
- Vollständigkeit von $\mathbb{K} \Rightarrow (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergiert $\forall x \in \Omega \setminus A$.
- Sei
$$f := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & x \in \Omega \setminus A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- f ist punktweise Grenzwert messbarer Funktionen $\Rightarrow f$ ist messbar und
$$\|f_n - f\|_\infty \le \|(f_n - f)|_{\Omega\setminus A}\|_\infty \le \frac{1}{k} \qquad \forall n \ge N_k.$$
- Somit $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

(Ω, μ) Maßraum

Insbesondere hat man bewiesen:

Korollar.
Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mu)$ konvergent, so $\exists (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergiert (μ-f.ü.).

(Ω, μ) Maßraum

Korollar.

$L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum bzgl.

$$(f|g) := \int_\Omega f\overline{g}\, d\mu.$$

Beweis.

- Positiv Definitheit: direkt aus der positiven Definitheit der Norm $\|\cdot\|_2$.
- Riesz–Fischer $\Rightarrow$ Vollständigkeit.

$\square$

Wir werden die Reflexivität der L^p-Räume untersuchen.
Dazu untersuchen wir die Konvexität von $\|\cdot\|_p$.

Gleichmäßig konvexe Räume

X normierter Raum

Definition. (J.A. Clarkson 1936)

- *X heißt strikt konvex, falls* $\forall x, y \in X$
$$\|x\|_X = \|y\|_X = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X \Rightarrow x = y.$$
- *X heißt gleichmäßig konvex, falls* $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ *s.d.* $\forall x, y \in X$
$$\|x\|_X = \|y\|_X = 1 \textit{ und } \|x-y\|_X > \epsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X < 1-\delta.$$

Anmerkung.

Ist X gleichmäßig konvex, so ist X auch strikt konvex.

Beispiele

- $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$ ist nicht strikt konvex: betrachte $x := (1, 0)$ und $y := (0, 1)$.
- $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$ ist nicht strikt konvex: betrachte $x := (1, 1)$ und $y := (1, -1)$.
- Jeder Prähilbertraum ist gleichmäßig konvex: laut dem Parallelogrammgesetz $\|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_X^2 = 1$.

X Banachraum

Theorem. (D. Milman 1938 & B.J. Pettis 1939)

Ist X gleichmäßig konvex, so ist X reflexiv.

Vorbereitendes Resultat: der Satz von Helly

X normierter Vektorraum, $\phi_1, \ldots, \phi_n \in X'$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Satz.
Folgende Aussagen sind äquivalent.

(a) $\forall \epsilon > 0 \; \exists x \in X$ *mit* $\|x\|_X \leq 1 + \epsilon$ *s.d.* $\phi_i(x) = \alpha_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

(b) $\forall (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n \; |\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| \leq \| \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i \|$.

Beweis des Satzes von Helly - "$(a) \Rightarrow (b)$"

- Seien $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, $\epsilon > 0$. Sei $x \in X$ mit $\|x\|_X \leq 1 + \epsilon$ s.d. $\phi_i(x) = \alpha_i \ \forall i = 1, \ldots, n$.
- Somit

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x)\right| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i \phi\| \|x\|_X \\ &\leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i \phi\| (1+\epsilon). \end{aligned}$$

- $\epsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow$

$$\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i \phi\right\|.$$

Beweis des Satzes von Helly - “$(a) \Leftarrow (b)$ ” - 1

- O.B.d.A.: $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sind linear unabhängig.
- Dann ist $\phi : X \ni x \mapsto (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$ linear und stetig.
- ϕ ist surjektiv, **denn sonst**: Ist der Unterraum $\phi(X) \subsetneq \mathbb{K}^n$, so $\exists$ $\beta \in (\mathbb{K}^n)'$ s.d.

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \phi_j(x) = \langle \beta, \phi(x) \rangle = 0 \qquad \forall x \in X. \qquad \lightning$$

- Satz über die offene Abbildung $\Rightarrow \phi(B_{1+\epsilon}(0))$ ist offen $\forall \epsilon > 0$.
- Dann $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in X$ mit $\|x\|_X < 1 + \epsilon$ s.d.

$$\phi_i(x) = \alpha_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

denn sonst:

Beweis des Satzes von Helly - “$(a) \Leftarrow (b)$” - 2

- Gilt die Aussage nicht, d.h., ist $\alpha \notin \phi(B)$.
- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists \psi \in (\mathbb{K}^n)'$ s.d.
$$\mathrm{Re}\psi(\phi(x)) \leq \mathrm{Re}\psi(\alpha) \leq |\psi(\alpha)| \qquad \forall x \in B.$$
- Durch Ersetzen $x \to xe^{i\theta}$ gilt
$$|\psi(\phi(x))| \leq |\psi(\alpha)| \qquad \forall x \in B.$$
- $\exists \beta \in \mathbb{K}^n$ s.d.
$$\psi(y) = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j \qquad \forall y \in \mathbb{K}^n.$$
- Dann ist $\forall x \in X$ mit $\|x\| < 1 + \epsilon$
$$\left|\sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x)\right| \leq \left|\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j\right|.$$
- Also:
$$(1+\epsilon)\left\|\sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j\right\| \leq \left|\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j\right|. \qquad \lightning$$

X normierter Raum

Lemma

X ist genau dann gleichmäßig konvex, wenn für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|_X$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_X = 0.$$

Beweis "$\Rightarrow$"

- Sei $\alpha := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n+y_n}{2} \right\|_X$.
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ klar.
- Sei $\alpha > 0$ und sei $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$, $\tilde{y}_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Sei $\epsilon > 0$.
- X glm. konvex $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d.

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| \geq \epsilon \Rightarrow \|\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\| \leq 2(1-\delta).$$

- Da aber $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\| = 2$ gilt schließlich $\|\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\| \geq 2(1-\delta)$.
- Somit notwendigerweise $\|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| \leq \epsilon$ für n groß genug.
- Dies gilt $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| = 0$.
- Somit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Beweis "$\Leftarrow$"

- X ist gleichmäßig konvex, **denn sonst** $\exists \epsilon > 0$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n, y_n \in X$ s.d.

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ und } \|x_n - y_n\| \geq \epsilon \text{ aber } \|x_n + y_n\| \geq 2(1 - \frac{1}{n}).$$

- Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|$$

obwohl

$$\|x_n - y_n\| \geq \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad ↯$$

X Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$

Lemma

Ist X gleichmäßig konvex und gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_X ,$$

so konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, **denn sonst** $\exists \epsilon > 0$ und $\exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, (m_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ s.d.

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 \ldots$$

und

$$\|x_{n_k} - x_{m_h}\| > \epsilon \qquad \forall h, k \in \mathbb{N}.$$

- Es gilt aber auch $\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{x_{n_k} + x_{m_k}}{2} \right\|_X = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|_X = \lim_{h\to\infty} \|x_{n_h}\|_X$.
- Voriges Lemma $\Rightarrow \lim_{h\to\infty} \|x_{n_h} - x_{m_h}\|_X = 0$. $\lightning$

X Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$

Lemma

Ist X gleichmäßig konvex und gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n,m\to\infty} \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_X ,$$

so konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, **denn sonst** $\exists \epsilon > 0$ und $\exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, (m_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ s.d.

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 \ldots$$

  und

$$\|x_{n_k} - x_{m_h}\| > \epsilon \qquad \forall h, k \in \mathbb{N}.$$

- Es gilt aber auch $\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2} \right\|_X = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\|_X = \lim_{h\to\infty} \|x_{n_h}\|_X$.
- Voriges Lemma $\Rightarrow \lim_{h\to\infty} \|x_{n_h} - x_{m_h}\|_X = 0.$ ↯

Beweises des Satzes von Milman–Pettis - 1

- Z.z.: $\forall x'' \in X''\ \exists x_0 \in X$ s.d. $\langle \phi, x_0\rangle = x''(\phi)\ \forall \phi \in X'$. (O.B.d.A.: $\|x''\|_{X''} = 1$).
- Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ mit $\|\phi_n\|_{X'} = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} |x''(\phi_n)| = \|x''\| = 1.$$

- Wir werden zeigen: $\exists x_0 \in X$ s.d. $\|x_0\|_X = 1$ und

$$x''(\phi_n) = \langle \phi_n, x_0\rangle \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Sei $\alpha_i := x''(\phi_i)$. Dann ist $\forall \beta \in \mathbb{K}^n$

$$\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| = \left|x''\left(\sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k\right)\right| \le \left\|\sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k\right\|.$$

Beweises des Satzes von Milman–Pettis - 2

- Satz von Helly $\Rightarrow \exists x_m \in X$ s.d. $\|x_m\| \leq 1 + \frac{1}{m}$ s.d.
$$\langle \phi_n, x_m \rangle = x''(\phi_n) \qquad \forall n = 1, \ldots, m.$$
- Sei $n \leq m$. Dann
$$\|x_n + x_m\| \geq |\langle \phi_n, x_n \rangle + \langle \phi_n, x_m \rangle| = 2|x''(\phi_n)|.$$
- Somit $\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{2}\|x_n + x_m\| \geq 1$.
- $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{2}\|x_n + x_m\| = 1$.
- Zweites Lemma $\Rightarrow \exists x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.
- Grenzwert für $m \to \infty \Rightarrow$
$$\lim_{m\to\infty} \langle \phi_n, x_m \rangle = \langle \phi_n, x_0 \rangle = x''(\phi_n).$$

Die Aussage ist nur für ϕ_n bewiesen, nicht $\forall \phi_0 \in X'$ mit $\|\phi_0\|_{X'} = 1$.

Beweises des Satzes von Milman–Pettis - 3

Man hat bewiesen, dass $\exists x_m \in X$ mit $\|x_m\| \leq 1 + \frac{1}{m}$ s.d.

$$\langle \phi_n, x_m \rangle = x''(\phi_n),$$

und folglich dass $\exists x_0 \in X$ s.d. $\|x_0\|_X = 1$ und

$$x''(\phi_n) = \langle \phi_n, x_0 \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nun gilt folgendes:

- Sei $\phi_0 \in X'$ mit $\|\phi_0\|_{X'} = 1$. Obiges Argument für $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \Rightarrow$ $\exists \hat{x}_0 \in X$ s.d. $\|\hat{x}_0\|_X = 1$ und

$$x''(\phi_n) = \langle \phi_n, \hat{x}_0 \rangle \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Somit $\frac{1}{2}\|x_0 + \hat{x}_0\|_X \geq |\langle \phi_n, \frac{1}{2}(x_0 + \hat{x}_0)\rangle| = |x''(\phi_n)|$.
- Somit $\frac{1}{2}\|x_0 + \hat{x}_0\|_X = 1$.
- X glm. konvex $\Rightarrow x_0 = \hat{x}_0 \Rightarrow \langle \phi_0, x_0 \rangle = \langle \phi_0, \hat{x}_0 \rangle$.
- $\phi_0 \in X'$ beliebig $\Rightarrow$ Aussage.

Clarksonsche Ungleichungen

(Ω, μ) Maßraum

Satz. (J.A. Clarkson 1936)

Sind $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$, so gilt

$$(\|f\|_p+\|g\|_p)^p+|\|f\|_p-\|g\|_p|^p \geq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p \geq 2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p$$

$\forall p \in [2, \infty)$ *und*

$$(\|f\|_p+\|g\|_p)^p+|\|f\|_p-\|g\|_p|^p \leq \|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p \leq 2\|f\|_p^p+2\|g\|_p^p$$

$\forall p \in (1, 2]$.

(Für $p = 2$ gelten alle 4 Ungleichungen: das ist das Parallelogramgesetz.)

(Wir führen den Beweis in der Version von O. Hanner 1958)

Korollar. (J.A. Clarkson 1936)
$L^p(\Omega,\mu)$ ist gleichmäßig konvex $\forall p \in (1,\infty)$.

Korollar.
$L^p(\Omega,\mu)$ ist reflexiv $\forall p \in (1,\infty)$.

Beweis des Korollars, $p \in (1,2)$ - 1

- Seien $\epsilon > 0$ und $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ mit
$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1 \text{ und } \|f-g\|_p > \epsilon.$$
Es reicht zu zeigen dass $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < 1-\delta$ für ein $\delta = \delta(\epsilon)$.
- Sei
$$f^* := \frac{1}{2}(f+g) \quad \text{und} \quad g^* := \frac{1}{2}(f-g),$$
und somit $f = f^* + g^*$ und $g = f^* - g^*$.
- Sei
$$\xi : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \ni (x,y) \mapsto (x+y)^p + |x-y|^p \in [0,+\infty).$$
- Es gilt $\xi(x,y) = \xi(y,x)$ und $\forall x \in (0,\infty)$ $y \mapsto \xi(x,y)$ ist monoton wachsend.
- $\xi(1,0) = 2$ und somit $\xi(1,\frac{\epsilon}{2}) > 2$ und $\xi(0,\frac{\epsilon}{2}) = \xi(\frac{\epsilon}{2},0) < 2$.
- MWS $\Rightarrow \exists \delta \in (0,1)$ s.d.
$$\xi(1-\delta, \frac{\epsilon}{2}) = 2.$$

Beweis des Korollars, $p \in (1,2)$ - 2

- 1. Clarksonsche Abschätzung für $f^*, g^* \Rightarrow$

$$\|f^* + g^*\|_p^p + \|f^* - g^*\|_p^p \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p)$$

  d.h.

$$\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p)$$

- $\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p)$ und $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ und $\|f - g\|_p > \epsilon$, und somit

$$\xi(1-\delta, \frac{\epsilon}{2}) = 2 \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p) \geq \xi(\|f^*\|_p, \frac{\epsilon}{2}).$$

- $\xi(\cdot, \frac{\epsilon}{2})$ monoton wachsend $\Rightarrow \|f^*\|_p \leq 1 - \delta$.

Beweis des Korollars, $p \in (2, \infty)$

- Seien $\epsilon > 0$ und $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ mit

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1 \text{ und } \|f - g\|_p > \epsilon.$$

- Sei wieder

$$f^* := \frac{1}{2}(f + g) \quad \text{und} \quad g^* := \frac{1}{2}(f - g).$$

- 2. Clarksonsche Abschätzung für $f^*, g^* \Rightarrow$

$$\|f^* + g^*\|_p^p + \|f^* - g^*\|_p^p \geq 2\|f^*\|_p^p + 2\|g^*\|_p^p$$

  und somit

$$2 = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geq 2\|f^*\|_p^p + 2\|g^*\|_p^p \geq 2\|f^*\|_p^p + 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

- D.h. $\|f^*\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$.
- Die Aussage gilt mit

$$\delta := 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis der 1. Abschätzung $(1 < p < 2)$ - 1

- Z.z.:

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p.$$

- Wir zeigen: Es reicht, diese Ungleichung für $f, g \geq 0$ zu beweisen.
- Sei
$$\delta : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \in [0, \infty).$$
- Es gilt $\min_{z_1 \in \mathbb{C}} \delta(z_1, z_2) = 2|z_2|^p$ (bei $z_1 = 0$) und $\min_{z_2 \in \mathbb{C}} \delta(z_1, z_2) = 2|z_1|^p$ (bei $z_2 = 0$).
- Schreibe $z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\phi}$, mit $a := |z_1|, b > 0$. Dann ist
$$d(\phi) = |a+be^{i\phi}|^p + |a-be^{i\phi}|^p = (a^2+b^2+2ab\cos\phi)^{\frac{p}{2}} + (a^2+b^2-2ab\cos\phi)^{\frac{p}{2}}.$$
- $\min_{\phi \in [0,2\pi)} d(\phi) = (a+b)^p + |a-b|^p$ (min wird in $\phi = 0, \pi$ angenommen).

Beweis der 1. Abschätzung $(1 < p < 2)$ - 2

- Somit

  $$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geq (|z_1| + |z_2|)^p + \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|^p \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

- Für $f(x) = z_1$ und $g(x) = z_2$ gilt somit

  $$\int_\Omega (|f(x) + g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p)\, dx \geq \int_\Omega ((|f(x)| + |g(x)|)^p + \big|\, |f(x)| - |g(x)| \big|^p)\, dx.$$

- Es reicht also

  $$(\|f^*\|_p + \|g^*\|_p)^p + \big|\|f^*\|_p - \|g^*\|_p\big|^p \leq \|f^* + g^*\|_p^p + \|f^* - g^*\|_p^p$$

  zu zeigen, wobei $f^* := |f|$ und $g^* := |g|$

Beweis der 1. Abschätzung $(1 < p < 2)$ - 3

- Sei
$$\zeta : (0,+\infty)\times(0,+\infty) \ni (x,y) \mapsto (x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}})^p+|x^{\frac{1}{p}}-y^{\frac{1}{p}}|^p \in [0,+\infty).$$
- Man soll
$$\int_\Omega \zeta(\tilde f(x),\tilde g(x))\, dx \geq \zeta\left(\int_\Omega \tilde f(x)\, dx, \int_\Omega \tilde g(x)\, dx\right)$$
zeigen, wobei $\tilde f := (f^*)^p$ und $\tilde g := (g^*)^p$.
- Es reicht [Warum? ÜA] z.z., dass ζ konvex ist.
- $\zeta(x,y) = \zeta(y,x)\ \forall x,y$ und $\zeta(0,0) = 0$ und $\zeta(tx,ty) = t\zeta(x,y)$ $\forall t \geq 0$.
- Nun, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \zeta(x,y) \in \mathbb{R},\ x,y \in [0,+\infty)\}$ ist ein in $(0,0,0)$ zentrierter Kegel.

Beweis der 1. Abschätzung ($1 < p < 2$) - 4

- Er reicht z.z., dass $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \zeta(x,y),\ x,y \in [0,+\infty)\}$ oder einfacher
$$\{(x,1,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \theta(x) := \zeta(x,1),\ x \in [0,+\infty)\}$$
konvex ist.
- $\theta(x) = \zeta(x,1) = (x^{\frac{1}{p}} + 1)^p + |x^{\frac{1}{p}} - 1|^p$ und somit
$$\theta'(x) = x^{\frac{1}{p}-1} \left(\left| x^{\frac{1}{p}} + 1 \right|^{p-1} \pm \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-1} \right).$$
während
$$\begin{aligned} \theta''(x) &= \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left(x^{\frac{1}{p}} + 1 \right)^{p-1} + \frac{p-1}{p} x^{\frac{2}{p}-2} \left(x^{\frac{1}{p}} + 1 \right)^{p-2} \\ &\quad + \frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-1} + \frac{p-1}{p} x^{\frac{2}{p}-2} \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-2} \\ &= \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left(x^{\frac{1}{p}} + 1 \right)^{p-2} + \frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-2} \end{aligned}$$
- Somit ist θ' stetig, $\theta''(x) > 0\ \forall x \neq 1$ und $\lim_{x \to 1} \theta''(x) = +\infty \Rightarrow$ θ konvex.

Beweis der 1. Abschätzung ($p > 2$)

Der Beweis wird ähnlich durchgeführt, indem man sieht, dass

- d sein max in $\phi = 0, \pi$ annimmt, und dass
- ζ konkav (statt konvex wie im Fall $p \in (1, 2)$) ist.

Beweis der 2. Abschätzung ($p > 2$)

- Z.z.:
$$2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p.$$
- Sei wieder
$$\delta : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \in [0, \infty).$$
- Schreibe wieder $z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\phi}$, mit $a := |z_1|$, $b > 0$, so dass
$$d(\phi) = |a + be^{i\phi}|^p + |a - be^{i\phi}|^p = (a^2 + b^2 + 2ab\cos\phi)^{\frac{p}{2}} + (a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi)^{\frac{p}{2}}.$$
- $\min_{\phi \in [0,2\pi)} d(\phi) = 2(a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}}$ (min wird in $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ angenommen).
- Konvexität von $t \mapsto t^{\frac{p}{2}} \Rightarrow$
$$(a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}} > a^p + b^p \qquad \forall a, b > 0.$$
- Somit $\min_{\phi \in [0,2\pi)} d(\phi) \geq 2a^p + 2b^p$.
- Somit $|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geq 2|z_1|^p + 2|z_2|^p \; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- Für $f(x) = z_1$ und $g(x) = z_2$ gilt somit
$$\int_\Omega (|f(x) + g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p)\, dx \geq 2 \int_\Omega (|f(x)|^p + |g(x)|^p)\, dx.$$

Beweis der 2. Abschätzung ($1 < p < 2$)

Der Beweis wird ähnlich durchgeführt. [Details: ÜA]

Gegenbeispiele

Anmerkung.

- $L^1(0,1)$ *ist nicht strikt* *(und somit auch nicht gleichmäßig)* *konvex.* *Denn für* $f(x) := 2x$ *und* $g(x) := 2 - 2x$, $x \in (0,1)$, *gilt* $\frac{1}{2}(f+g)(x) = 1$, $x \in (0,1)$, *und somit* $f, g \in L^1(0,1)$ *und* $\|f\|_1 = \|g\|_1 = \|\frac{1}{2}(f+g)\|_1 = 1$, *obwohl* $f \neq g$.
- $L^\infty(0,1)$ *ist nicht strikt* *(und somit auch nicht gleichmäßig)* *konvex.* *Denn für* $f(x) := 1$ *und* $g(x) := 1 - 2x$, $x \in (0,1)$, *gilt* $\frac{1}{2}(f+g)(x) = 1 - x$, $x \in (0,1)$, *und somit* $f, g \in L^\infty(0,1)$ *und* $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|\frac{1}{2}(f+g)\|_\infty = 1$, *obwohl* $f \neq g$.

(Ω, μ) Maßraum.

Satz.
Sind $p, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, so ist

$$\gamma : L^q(\Omega, \mu) \ni g \mapsto \gamma_g \in (L^p(\Omega, \mu))'$$

ein isometrischer Isomorphismus, wobei

$$\gamma_g : L^p(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \int_\Omega f \cdot g \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

Beweis.
Ähnlich wie für ℓ^p
[Details: ÜA] $\square$

σ-endliche Maßräume und Dualität

(Ω, μ) Maßraum

Definition.
(Ω, μ) heißt σ-endlich, falls $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ s.d. $\mu(A_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.
(O.b.d.A.: $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Satz.
Ist (Ω, μ) σ-endlich, so ist

$$\gamma : L^\infty(\Omega, \mu) \ni g \mapsto \gamma_g \in (L^1(\Omega, \mu))'$$

ein isometrischer Isomorphismus, wobei

$$\gamma_g : L^1(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \int_\Omega f \cdot g \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

Beweis - Injektivität

- Erfüllt $g \in L^\infty(\Omega,\mu)$ $\gamma_g = 0$, d.h.
$$\int_\Omega f \cdot g \, d\mu = 0 \qquad \forall f \in L^1(\Omega,\mu),$$
so gilt $\forall f_n := \mathbf{1}_{\Omega_n} \mathrm{sign} g \in L^1(\Omega,\mu)$
$$\int_{\Omega_n} |g| d\mu = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Somit $g = 0$ μ-f.ü.

Beweis - Surjektivität - 1

- Sei $\phi \in (L^1(\Omega,\mu))'$. Z.z.: $\exists u \in L^\infty(\Omega,\mu)$ s.d. $\phi = \gamma_u$.
- Sei
$$\theta_{|\Omega_1} :\equiv \alpha_1 \quad \mu\text{-f.ü. und } \theta_{|\Omega_{n+1}\setminus\Omega_n} :\equiv \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
wobei $\alpha_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit
$$\|\theta\|_2^2 = \int_{\Omega_1} |\theta|^2 d\mu + \sum_{k=1}^\infty \int_{\Omega_{k+1}\setminus\Omega_k} |\theta|^2 d\mu = (|\Omega_1|\alpha_1)^2 + \sum_{k=1}^\infty (|\Omega_{n+1}\setminus\Omega_n|\alpha_n)^2 < \infty,$$
s.d. $\theta \in L^2(\Omega,\mu)$.
- $L^2(\Omega,\mu) \ni f \mapsto \langle \phi, \theta\cdot f\rangle \in \mathbb{C}$ ist ein stetiges lineares Funktional.
- Riesz–Fréchet $\Rightarrow \exists | v \in L^2(\Omega,\mu)$ s.d.
$$\langle \phi, \theta \cdot f\rangle = (v|f)_{L^2} \qquad \forall f \in L^2(\Omega,\mu).$$
- Sei
$$u := \frac{v}{\theta}, \qquad \mu - \text{f.ü.}.$$

Beweis - Surjektivität - 2

- u ist meßbar und $u\mathbf{1}_{\Omega_n} \in L^2(\Omega,\mu)$. Noch z.z.: $u \in L^\infty(\Omega,\mu)$ und
$$\langle \phi, f\rangle = \int_\Omega uf\, d\mu \qquad \forall f \in L^1(\Omega,\mu).$$
- Es gilt
$$\langle \phi, \mathbf{1}_{\Omega_n} g\rangle = \int_\Omega u\mathbf{1}_{\Omega_n} g\, d\mu \qquad \forall g \in L^\infty(\Omega,\mu), \forall n \in \mathbb{N},$$
(setze einfach $f := \frac{\mathbf{1}_{\Omega_n} g}{\theta}$ in
$$\langle \phi, \theta \cdot f\rangle = (v|f)_{L^2} \qquad \forall f \in L^2(\Omega,\mu)$$
ein).
- Sei $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$ und
$$A := \{x \in \Omega : |u(x)| > C\}.$$
- $\mu(A) = 0$, denn für $g := \mathbf{1}_A \mathrm{sign} u$ gilt
$$\int_{A\cap\Omega_n} |u| d\mu \le \|\phi\|_{(L^1)'} \mu(A\cap\Omega_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Somit $C\mu(A\cap\Omega_n) \le \|\phi\|_{(L^1)'}\mu(A\cap\Omega_n) \Rightarrow \mu(A\cap\Omega_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Daher $\mu(A) = 0$ und $u \in L^\infty(\Omega,\mu)$ mit
$$\|u\|_\infty \le \|\phi\|_{(L^1)'}.$$

Beweis - Surjektivität - 3

- Sei $h \in L^1(\Omega, \mu)$. Dann ist $u \cdot h \in L^1(\Omega)$.
- Setze $g := T_n h$ in

$$\langle \phi, \mathbf{1}_{\Omega_n} g \rangle = \int_\Omega u \mathbf{1}_{\Omega_n} g \, d\mu \qquad \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu), \forall n \in \mathbb{N}$$

ein, wobei T_n der Trunkierungsoperator ist:

$$T_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \min\{|x|, n\} \mathrm{sign}(x) \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- Beppo Levi $\Rightarrow \mathbf{1}_{\Omega_n} T_n h \to h$ in $L^1(\Omega, \mu)$.
- Somit

$$\langle \phi, h \rangle \leftarrow \langle \phi, \mathbf{1}_{\Omega_n} T_n h \rangle = \int_\Omega u \mathbf{1}_{\Omega_n} T_n h \, d\mu \to \int_\Omega u \; h \, d\mu.$$

Beweis - Isometrie

- Schon bekannt:

$$\|u\|_\infty \leq \|\phi\|_{(L^1)'}.$$

- Andererseits

$$\langle \phi, h \rangle = \int_\Omega u\ h\ d\mu$$

und somit

$$|\langle \phi, h \rangle| \leq \|u\|_\infty \|h\|_1 \qquad \forall h \in L^1(\Omega, \mu).$$

- Somit $\|\phi\|_{(L^1)'} \leq \|u\|_\infty$.

Man identifiziert also $(L^1(\Omega,\mu))'$ und $L^\infty(\Omega,\mu)$.

Satz.

Sei (Ω,μ) σ-endlich. Besteht (Ω,μ) nicht aus endlich vielen Atomen, so ist $L^1(\Omega,\mu)$ nicht reflexiv.

Beweis.

Betrachte zwei Fälle:

(i) $\forall \epsilon > 0 \exists \omega \subset \Omega$ messbar mit $0 < \mu(\omega) < \epsilon$.

(ii) $\exists \epsilon > 0$ s.d. $\mu(\omega) \geq \epsilon \ \forall \omega \subset \Omega$ messbar mit $\mu(\omega) > 0$.

- Im Fall (i) betrachtet man eine Folge ω_n messbarer Mengen mit $\mu(\omega_n) > 0$ und $\mu(\omega_n) \searrow 0$.
- Man findet mithilfe der angenommenen Reflexivität eine schwach konvergierende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ s.d. $\int_{\omega_m} u_n \, d\mu = 1$ für n groß aber auch $\lim_{m\to\infty} \int_{\omega_m} \sigma - \lim_{n\to\infty} u_n \, d\mu = 0$.
- Im Fall (ii) ist $L^1(\Omega,\mu) \simeq \ell^1$ und somit nicht reflexiv.

[Details: ÜA] $\square$

Korollar.

Sei (Ω, μ) σ-endlich. Besteht (Ω, μ) nicht aus endlich vielen Atomen, so ist $L^\infty(\Omega, \mu)$ nicht reflexiv.

Anmerkung.

- *Somit ist $L^1(\Omega, \mu) \subsetneq (L^\infty(\Omega, \mu))'$. Solche Funktionale können mithilfe von Hahn–Banach gefunden werden, etwa für $\Omega = \mathbb{R}^N$.*
- *Sei $\delta_0 : C_c(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{K}$: dann ist $\delta_0 \in (C_c(\mathbb{R}^N))'$.*
- *Hahn–Banach $\Rightarrow$ δ_0 kann auf ein $\phi \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))'$ fortgesetzt werden.*
- *Also $\langle \phi, f \rangle = f(0)$ $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^N)$.*
- $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $\langle \phi, \cdot \rangle \neq \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot d\mu$, **denn sonst** *wäre*
$$\int_{\mathbb{R}^N} uf \, d\mu = 0 \qquad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^N) \text{ s.d. } f(0) = 0.$$
- *Man kann zeigen, dass dann $u = 0$ μ-f.ü. und somit $\phi = 0$.* $\lightning$

Separabilität der L^p-Räume

Ω messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^N$, μ Lebesgue-Maß

Satz.
$L^p(\Omega)$ ist separabel $\forall p \in [1, \infty)$.

Satz.
$L^\infty(\Omega)$ ist nicht separabel.

Beweis.
Der Beweis ist ähnlich zum Fall von ℓ^∞.
[Details: ÜA] $\square$

Vorbereitendes Resultat

Satz.
$C_c(\mathbb{R}^N)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^N)$ $\forall p \in [1, \infty)$.

Anmerkung.
Eigentlich gilt sogar: $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $L^p(\Omega, \mu)$ bzgl. der $\| \cdot \|_p$-Norm $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\forall p \in [1, \infty)$. Für einen Beweis: vgl. H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Cor. 4.23.

Beweis

- Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ und $\epsilon > 0$.
- Sei $T_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \min\{|x|, n\}\mathrm{sign}(x) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Sei $f_n := \mathbf{1}_{B_n(0)} T_n f$.
- Beppo Levi $\Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$.
- Somit $\exists g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $K = B_n(0) \subset \mathbb{R}^N$ kompakt s.d. $g_{|\mathbb{R}^N \setminus K} = 0$ μ-f.ü. und
$$\|f - g\|_p < \epsilon$$
(betrachte $g = f_n$ für n groß genug).
- $\overline{C_c(\mathbb{R}^N)} = L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists h \in C_c(\mathbb{R}^N)$ s.d.
$$\|g - h\|_1 \leq \delta.$$
- Sei $\tilde{h} := T_n h \in C_c(\mathbb{R}^N)$, wobei $n \geq \|g\|_\infty$, so dass $\|h\|_\infty \geq \|\tilde{h}\|_\infty$.
- Interpolationsungleichung $\Rightarrow$ es gilt
$$\|g - \tilde{h}\|_p \leq \|g - \tilde{h}\|_1^{\frac{1}{p}} \|g - \tilde{h}\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \leq \delta^{\frac{1}{p}} (2\|\tilde{h}\|_\infty)^{1-\frac{1}{p}}.$$
- Die Aussage folgt, wenn man δ klein genug wählt, dass $\delta^{\frac{1}{p}} (2\|\tilde{h}\|_\infty)^{1-\frac{1}{p}} < \epsilon$.

Beweis der Separabilität - 1

- Man nimmt erst an, $\Omega = \mathbb{R}^N$.
- Sei $\mathcal{R} := \{R = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^N : a_k, b_k \in \mathbb{Q}\}$.
- Sei X der Vektorraum der endlichen $\mathbb{Q}$-linearen Kombinationen von Funktionen $\mathbf{1}_R$, $R \in \mathcal{R}$.
- $X \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ und X ist abzählbar.
- Es reicht z.z.: $\overline{X} = L^p(\mathbb{R}^N)$.

Beweis der Separabilität - 2

- Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ und $\epsilon > 0$. Sei $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ s.d. $\|f - g\|_p \leq \epsilon$.
- Sei $R \in \mathcal{R}$ s.d. $g_{|\mathbb{R}^N \setminus R} \equiv 0$.
- R kompakt $\Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists R_1, \ldots, R_N \in \mathcal{R}$ s.d. $R = \bigcup_{h=1}^N R_h$ und

$$\sup_{x \in R_i} g(x) - \inf_{x \in R_i} g(x) < \delta.$$

- Für $\delta := \epsilon |R|^{-\frac{1}{p}}$, $\tilde{h} := (\tilde{h}_i)_{1 \leq i \leq N}$ mit

$$\tilde{h}_i := \frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} g(x)\, dx,$$

  und h eine $\mathbb{Q}$-Approximation von $\tilde{h}$ gilt (Hölder)

$$\|g - h\|_p \leq \|g - h\|_\infty |R|^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

- Somit

$$\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p \leq 2\epsilon.$$

Beweis der Separabilität - 3

- Ist $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, betrachte die Abbildung

$$T : L^p(\Omega) \ni f \mapsto Tf \in L^p(\mathbb{R}^N),$$

wobei

$$Tf(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \notin \Omega. \end{cases}$$

- $T(L^p(\Omega))$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^N)$, also ebenfalls separabel.
- $T(L^p(\Omega))$ ist dem $L^p(\Omega)$ isomorph.
- Somit ist $L^p(\Omega)$ separabel.

Der Satz von Stone–Weierstraß

K kompakter metrischer Raum

Theorem. (K.T.W. Weierstraß 1885 & M.H. Stone 1937)

Eine Unteralgebra $\mathcal{A} \subset C(K;\mathbb{K})$ liegt dicht in $C(K,\mathbb{K})$, falls

- $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ *trennt die Punkte von K, d.h. $\forall x, y \in K$, $x \neq y$, $\exists f \in \mathcal{A}$ s.d. $f(x) \neq f(y)$,*
- $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$ *(falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Dazu verwendet man:

Lemma (U. Dini)

Sei K kompakter metrischer Raum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K,\mathbb{R})$ punktweise monoton wachsend. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, so ist die Konvergenz bereits gleichmäßig (d.h. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$).

Vorbereitendes Lemma - 2

Lemma

$[0,1] \ni t \mapsto \sqrt{t} \in [0,1]$ *ist gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Polynomen.*

Beweis.

- Definiere $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$p_0(t) := 0, \qquad p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2), \qquad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

- Induktiv beweist man, dass $p_n(t) \le \sqrt{t}\ \forall t \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
- Somit ist $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, $\forall t \in [0,1]$. Somit konvergiert es.
- In der Tat: $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}\ \forall t \in [0,1]$. [Details: ÜA].
- Lemma von Dini $\Rightarrow$ Aussage.

□

Vorbereitendes Lemma - 2

Lemma

$[0,1] \ni t \mapsto \sqrt{t} \in [0,1]$ ist gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Polynomen.

Beweis.

- Definiere $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$p_0(t) := 0, \qquad p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2), \qquad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

- Induktiv beweist man, dass $p_n(t) \le \sqrt{t}\ \forall t \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
- Somit ist $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, $\forall t \in [0,1]$. Somit konvergiert es.
- In der Tat: $\lim_{n\to\infty} p_n(t) = \sqrt{t}\ \forall t \in [0,1]$. [Details: ÜA].
- Lemma von Dini $\Rightarrow$ Aussage.

$\square$

Beweis - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ - 1

- Wir zeigen: Ist $f \in A$, dann ist $|f| \in \overline{A}$, wobei $|f| : K \ni x \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}_+$: klar für $f = 0$.
- Sonst betrachte $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$mit

  $$p_0(t) := 0, \qquad p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t))^2, \qquad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

  und schreibe

  $$|f| = \|f\|_\infty \sqrt{\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}} = \|f\|_\infty \lim_{n\to\infty} p_n\Big(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\Big).$$

- Somit: Sind $f, g \in \overline{A}$, so gilt auch $\inf\{f,g\} := \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \overline{A}$ und $\sup\{f,g\} := \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \overline{A}$.
- Sind $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann $\exists f \in A$ s.d. $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$ z.B.

  $$f(z) := \alpha + (\beta - \alpha)\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}, \qquad z \in K,$$

  wobei $g \in A$ x, y trennt.

Beweis - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ - 2

Noch z.z. $\overline{A} = C(K, \mathbb{R})$.

- Sei $\epsilon > 0$ und $f \in C(K, \mathbb{R})$ und sei $x \in K$. Dann $\forall y \in K\ \exists g_y \in A$ s.d. $g_y(x) = f(x)$ und $g_y(y) = f(y)$.
- Sei U_y Umgebung von y s.d. $g_y(x) \le f(x) + \epsilon\ \forall x \in U_y$.
- $K = \bigcup_{y \in K} U_y$ und Heine–Borel $\Rightarrow \exists\ y_1, \dots, y_N \in K$ s.d. $K = \bigcup_{k=1}^N U_{y_k}$.
- Sei nun $h_x := \inf_{1 \le k \le N} g_{y_k}$. Dann gilt $h_x \in \overline{A}$.
- $h_x(x) = f(x)$ und $h_x \le f + \epsilon$ und $h_x(z) \ge f(z) - \epsilon\ \forall z \in V_x$, V_x Umgebung von x.
- Heine–Borel $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_M \in K$ s.d. $K = \bigcup_{k=1}^M V_{x_k}$.
- Die Aussage gilt mit $h := \sup_{1 \le k \le M} h_{x_k}$, da $h \in \overline{A}$.

Beweis - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- $\forall f \in A$ $\operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2} \in A$ und $\operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \in A$.
- Sei $A_0 := \{f \in A : f = \overline{f}\}$: da $\mathbf{1} \in A_0$ und A_0 trennt die Punkte von K, $\overline{A_0} = C(K, \mathbb{R})$.
- $A = A_0 + iA_0 \Rightarrow$ Aussage.

Korollar.
$\overline{\mathbb{K}[x]} = C(I)$, *für alle abgeschlossenen Intervalle* $I \subset \mathbb{R}$.

Korollar.
$\overline{\mathbb{Q}[x]} = L^p(J)$ *für alle offenen* $J \subset \mathbb{R}$, $\forall p \in [1, \infty)$.

Multiplikationsoperatoren auf L^p-Räumen

(Ω,μ) σ-endlicher Maßraum, $q:\Omega\to\mathbb{K}$ messbar, $p\in[1,\infty]$

Satz.
$M_q : f \mapsto q\cdot f$ ist genau dann ein beschränkter linearer Operator auf $L^p(\Omega,\mu)$, wenn $q\in L^\infty(\Omega,\mu)$, und $\|M_q\| = \|q\|_\infty$.
$0\in\rho(M_q)$ genau dann, wenn $0\notin q_{\mathrm{ess}}(\Omega)$, wobei

$$q_{\mathrm{ess}}(\Omega) := \{\lambda\in\mathbb{C} : \mu(\{s\in\Omega : |q(s)-\lambda|<\epsilon\})\neq 0\ \forall\epsilon>0\}.$$

Beweis.

- Höldersche Ungleichung $\Rightarrow \|M_q\|\le\|q\|_\infty$.
- σ-Endlichkeit $\Rightarrow \|M_q\|\ge\|q\|_\infty$. [Details: ÜA]
- Invertierbarkeit: ähnlich wie im Fall von $C(\overline{\Omega})$. [Details: ÜA]

$\square$

Beste Approximation

X Banachraum, $C \subset X$

Satz.
Ist X reflexiv und strikt konvex und ist C abgeschlossen und konvex, so $\forall x \in X\ \exists | y \in C$ s.d.

$$\|x - y\|_X = \inf\{\|z - x\|_X : z \in C\}.$$

(M, d) metrischer Raum

Definition.

$f : M \to \mathbb{R}$ heißt nach unten halbstetig falls $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\{x \in M : f(x) \leq \lambda\}$$

abgeschlossen ist.

Lemma

Sei X ein reflexiver Banachraum. Sei $C \subset X$ abgeschlossen und konvex. Ist $\phi : C \to \mathbb{R}$ nach unten halbstetig und konvex und erfüllt ϕ

$$\lim_{\substack{\|y\|_X \to \infty \\ y \in C}} \phi(y) = \infty,$$

so besitzt f ein Minimum.

Details: ÜA .

$\square$

Beweis

- Sei $x \in X$ und definiere $\phi_x : C \ni y \mapsto \|x - y\|_X \in \mathbb{R}$.
- ϕ_x ist stetig, konvex und
$$\lim_{\substack{\|y\|_X \to \infty \\ y \in C}} \phi_x(y) = \infty.$$
- Voriges Lemma $\Rightarrow \exists y_x \in C$ s.d. $\|x - y_x\| = \inf\{\|z - x\| : z \in C\}$.
- Sei $\tilde{y} \in C$ s.d.
$$\|x - y\| = \|x - \tilde{y}\|.$$
- Für $u := x - y_x$ und $\tilde{u} := x - \tilde{y}$ gilt
$$\left\|\frac{u + \tilde{u}}{2}\right\| = \left\|x - \frac{y_x + \tilde{y}}{2}\right\| \geq \|x - y_x\| = \|u\| = \|\tilde{u}\|,$$
da C konvex und somit $\frac{y_x + \tilde{y}}{2} \in C$.
- Es gilt auch
$$\left\|\frac{u + \tilde{u}}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}(\|u\| + \|\tilde{u}\|) = \|u\|.$$
- X strikt konvex $\Rightarrow u = \tilde{u}$ und somit $y_x = \tilde{y}$.

Beispiel

(Ω, μ) Maßraum

Korollar.
$\forall f \in L^p(\Omega)\ \exists | g \in L^p_+(\Omega) := \{h \in L^p(\Omega) : h \geq 0\ \mu\text{-f.ü.}\}$ s.d.

$$\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p \qquad \forall h \in L^p_+(\Omega).$$

Korollar.
*Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Dann $\forall f \in L^p(\Omega)\ \forall q \in [p, \infty]$
$\exists | g \in B_1^{(q)}(0) := \{h \in L^q(\Omega) : \|h\|_q \leq 1\}$ s.d.*

$$\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p \qquad \forall h \in B_1^{(q)}(0).$$

Beweis.
[Details: ÜA] □

Unbeschränkte Operatoren

X, Y normierte Räume
Ein linearer Operator $T : X \to Y$ ist genau dann unbeschränkt, falls $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X$ s.d. $\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|$.

Anmerkung.

Ein unbeschränkter Operator muss nicht überall in X definiert sein. Vielmehr betrachtet man i.A. $T : X \supset D(T) \to Y$.

Definition.

$T : X \supset D(T) \to Y$ heißt dicht definiert, falls $\overline{D(T)} = X$.

Beispiele unbeschränkter Operatoren

Der Ortsoperator

$$L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \mathrm{id} \cdot f \in L^2(\mathbb{R}).$$

und der Drehimpulsoperator

$$L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}) \ni f \mapsto \begin{pmatrix} -i(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}) \\ -i(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}) \\ -i(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3).$$

sind unbeschränkte Operatoren.

Fundamentales Beispiel: der Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

z.B. mit $D(\Delta) := C^2(\mathbb{R}^N)$ auf $X := C(\mathbb{R}^N)$

I.A. hängt $D(\Delta)$ von X sowie von den *Randbedingungen* ab.

Abgeschlossene Operatoren

X, Y normierte Räume, $T : X \supset D(T) \to Y$ linear

Definition.
T heißt abgeschlossen, falls sein Graph

$$G(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in D(T)\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ ist; d.h., wenn für jede $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ aus

$$\exists \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \quad \textit{und} \quad \exists \lim_{n\in\mathbb{N}} Tx_n = y$$

folgt, dass

$$x \in D(T) \quad \textit{und} \quad Tx = y.$$

Fundamentales Beispiel

Beispiel.

$X := C([0,1])$.

Sei

$$\begin{aligned} D_1(D) &:= C^1([0,1]) \\ Du &:= u'. \end{aligned}$$

Dann ist $(D, D_1(D))$ *abgeschlossen, denn aus* $\|\cdot\|_\infty$*-Konvergenz von* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **und** $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *folgt, dass* $\lim_{n\to\infty} f_n \in C^1([0,1])$ *und*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

Weiteres Beispiel

$G = (E, V)$ abzählbarer Graph
mit Adjazenzmatrix A und Gradenmatrix
$D := \mathrm{diag}(d(v))_{v \in V}$, wobei $d(v) := |\{w \in V : v \sim w\}|$.

$$\Delta_G := D - A \in M_{|V|}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \Delta_G$ ist einen Operator auf $\ell^2(V)$

Explizit:

$$\Delta_G : (x_v)_{v \in V} \mapsto \left(\sum_{v \sim w} (x_v - x_w) \right)_{v \in V}$$

Δ_G ist genau dann beschränkt auf $\ell^2(V)$, falls G gleichmäßig lokal endlich ist, d.h.:

$$\exists M > 0 \text{ s.d. } d(v) \leq M \; \forall v \in V.$$

Beispiel eines nichtabgeschlossenen Operators

$X := C([0,1])$, $T : D(T) \to C([0,1])$,

$$Tf := f'$$

mit

$$D(T) := \{f \in C^1([0,1]) : \mathrm{supp} f \subset (0,1]\}.$$

Seien

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [0, n^{-1}], \\ (t - n^{-1})^2 & \text{falls } t \in [n^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist $f_n \to f$ und $f_n' \to f'$ in X mit

$$f(t) := t^2.$$

T ist **nicht** abgeschlossen, da $\mathrm{supp} f = [0,1]$ und somit $f \notin D(T)$.

Eigenschaften abgeschlossener Operatoren

X, Y Banachräume, $T : X \supset D(T) \to Y$ abgeschlossener Operator

Lemma

- *$T + B$ ist abgeschlossen $\forall B \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
- *Ist $\lambda \,\mathrm{Id} - T$ injektiv für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn $(\lambda \,\mathrm{Id} - T)^{-1}$ abgeschlossen ist.*
- *TB mit $D(TB) := \{z \in Z : Bz \in D(T)\}$ ist abgeschlossen $\forall B \in \mathcal{L}(Z, X)$.*
- $\ker T$ *ist abgeschlossen.*

Beweis.

[ÜA] □

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

X, Y Banachräume, $T : X \supset D(T) \to Y$ linear

Theorem.
Ist T abgeschlossen mit $D(T) = X$, so ist $T : X \to Y$ bereits beschränkt.

Beweis.

- $G(T)$ ist ein Banachraum (da abgeschlossener Teilraum von $X \times Y$).
- $\pi_1 : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X$ ist beschränkt (da T abgeschlossen), surjektiv (da $D(T) = X$) und injektiv (da $Tx = 0$ falls $x = 0$).
- Satz der beschränkten Inverse $\Rightarrow \pi_1^{-1} : X \ni x \mapsto (x, Tx) \in G(T)$ ist beschränkt.
- Also ist auch T stetig.

□

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

X, Y Banachräume, $T : X \supset D(T) \to Y$ linear

Theorem.
Ist T abgeschlossen mit $D(T) = X$, so ist $T : X \to Y$ bereits beschränkt.

Beweis.

- $G(T)$ ist ein Banachraum (da abgeschlossener Teilraum von $X \times Y$).
- $\pi_1 : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X$ ist beschränkt (da T abgeschlossen), surjektiv (da $D(T) = X$) und injektiv (da $Tx = 0$ falls $x = 0$).
- Satz der beschränkten Inverse $\Rightarrow \pi_1^{-1} : X \ni x \mapsto (x, Tx) \in G(T)$ ist beschränkt.
- Also ist auch T stetig.

□

Die Graphennorm

X, Y Banachräume, $T : X \supset D(T) \to Y$ linear

Definition.
Die Graphennorm $\|\cdot\|_T$ von T ist

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \qquad x \in D(T).$$

X, Y Banachräume, $T : X \supset D(T) \to Y$ linear

Lemma

T ist genau dann abgeschlossen, wenn $[D(T)] := (D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum ist.

Beweis.

- "$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ s.d. $\|x_n - x_m\|_T \to 0$.
- Somit sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ konvergent.
- T abgeschlossen $\Rightarrow x := \lim_{n\to\infty} x_n \in D(T)$ und $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.
- Somit $\|x_n - x\|_T \to 0$.
- "$\Leftarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ s.d. $x_n \to x$ in X und $Tx_n \to y$ in Y.
- Dann sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X bzw. in Y, und somit ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $(D(T), \|\cdot\|_T)$.
- $(D(T), \|\cdot\|_T)$ Banachraum $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $(D(T), \|\cdot\|_T)$ – deshalb $Tx \leftarrow Tx_n \to y$.
- Somit gilt die Aussage.

X, Y Banachräume, $T : X \supset D(T) \to Y$ linear

Lemma

T ist genau dann abgeschlossen, wenn $[D(T)] := (D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum ist.

Beweis.

- "$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ s.d. $\|x_n - x_m\|_T \to 0$.
- Somit sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ konvergent.
- T abgeschlossen $\Rightarrow x := \lim_{n\to\infty} x_n \in D(T)$ und $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.
- Somit $\|x_n - x\|_T \to 0$.
- "$\Leftarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ s.d. $x_n \to x$ in X und $Tx_n \to y$ in Y.
- Dann sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in X bzw. in Y, und somit ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $(D(T), \|\cdot\|_T)$.
- $(D(T), \|\cdot\|_T)$ Banachraum $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $(D(T), \|\cdot\|_T)$ – deshalb $Tx \leftarrow Tx_n \to y$.
- Somit gilt die Aussage.

X, Y normierte Räume, $S : X \supset D(S) \to Y$,
$T : X \supset D(T) \to Y$

Definition.

Man sagt, S ist enthalten in T oder T ist eine Erweiterung von S, $S \subset T$, falls

- $D(S) \subset D(T)$ *und*
- $Sx = Tx \ \forall x \in D(S)$.

Abschließbare und adjungierte Operatoren

X, Y Banachräume, $S : X \supset D(S) \to Y$ linear

Definition.

- *Ist S nicht abgeschlossen und existiert der kleinste abgeschlossene Operator T, s.d. $S \subset T$, so heißt S abschließbar und T ihr Abschluss, $T = \overline{S}$.*
- *Ist S dicht definiert, so ist der zu S adjungierte Operator*
$$S' : Y' \supset D(S') \to X',$$
wobei
$$\begin{aligned} D(S') &:= \{y' \in Y' : \exists x' \in X' \text{ s.d. } \langle Sx, y' \rangle = \langle x, x' \rangle \ \forall x \in D(S)\} \\ S'y' &:= x' \end{aligned}$$

(Existiert ein solches x', so ist es auch eindeutig bestimmt.)

Anmerkung.

- $S_1 \subset S_2$ mit $\overline{S_1} = S_2 \to S_2' \subset S_1'$ *(ohne Dichtheitsbedingung ist die Implikation i.A. falsch).*
- *Ist $X = Y$ ein Hilbertraum, so Lemma von Riesz* $\Rightarrow$

$$y' \in D(S') \Leftrightarrow |(Sx|y')_H| \leq C\|x\|_H \; \forall x \in D(S).$$

- *Sind X, Y Hilberträume, so definiert man den* ***Hilbertraum-adjungierten Operator*** *durch*

$$D(S') := \{y' \in Y : \exists x' \in X \text{ s.d. } (Sx|y')_H = (x|x')_H\}.$$

X, Y Banachräume, $S : X \supset D(S) \to Y$ linear

Lemma

S ist genau dann abschließbar, falls $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(S)$

$$x_n \to 0 \text{ und } Sx_n \to z \in X \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

Der Abschluss ist durch

$$G(\overline{S}) = \overline{G(S)}$$

bestimmt.

Beweis.

[ÜA] □

Beispiel eines abschließbaren Operators

Seien $X = C([0,1])$ und $D(T) = C^\infty([0,1])$.
Dann ist $T : D(T) \ni u \mapsto u' \in X$ abschließbar.
Ihr Abschluss ist

$$\begin{aligned} D_1(D) &:= C^1([0,1]) \\ Du &:= u'. \end{aligned}$$

H Hilbertraum, $S : H \supset D(S) \to H$ dicht definiert

Satz.

(a) *S' ist abgeschlossen.*

(b) *S ist genau dann abschließbar, wenn S' dicht definiert ist, und dann gilt*
$$\overline{S} = S''.$$

Definition.
Ein Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ heißt unitär, falls $(Ux|Uy) = (x|y)$ $\forall x, y \in H$.

Beweis von (a)

- Sei
$$U : H \times H \ni (x,y) \mapsto (-y,x) \in H \times H.$$
- U ist unitär $\Rightarrow U(E^\perp) = (U(E))^\perp \ \forall E$ Unterraum von H.
- Sei $(x,y) \in H$. Dann
$$\begin{aligned}(x,y) \in U(G(S))^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \big((x,y)\big|(-Sz,z)\big) = 0 \quad \forall z \in D(S)\\ &\Leftrightarrow \quad (x|Sz) = (y|z) \quad \forall z \in D(S)\\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in G(S').\end{aligned}$$
- Somit $G(S') = U(G(S))^\perp$.
- $U(G(S))^\perp \subset H \times H$ ist als orthogonaler Raum immer abgeschlossen $\Rightarrow$ Aussage.

Beweis von (b)

"$\Leftarrow$"

- $G(S)$ Vektorraum und $U^2 = -\mathrm{Id} \Rightarrow$

$$\overline{G(S)} = G(S)^{\perp\perp} = (U^2(G(S)))^{\perp\perp} = (U(U(G(S)))^{\perp})^{\perp} = (U(G(S')))^{\perp}.$$

- Somit dank (a) ist S' dicht definiert $\Leftrightarrow$ $\overline{G(S)}$ ist Graph von S''.

"$\Rightarrow$"

- Falls $S'' = \overline{S}$, dann ist S' dicht definiert, **denn sonst**: Sei $z \in D(S')^{\perp}$.
- $(z, 0) \in (G(S'))^{\perp}$.
- Somit ist $U(G(S')^{\perp}) = (U(G(S')))^{\perp}$ nicht der Graph eines linearen Operators.
- Aber S abschließbar $\Rightarrow G(\overline{S}) = \overline{G(S)} = (U(G(S')))^{\perp}$. $\lightning$

Beispiel eines nichtabschließbaren Operators

Sei $X := L^2(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} D(T) &:= L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \\ Tu &:= \int_{\mathbb{R}} u(x)dx \cdot u_0 \end{aligned}$$

für einen Vektor $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $u_0 \neq 0$.
Ist $v \in D(T')$, so gilt

$$\begin{aligned} (u|T'v)_{L^2} &= (Tu|v)_{L^2} \\ &= (u|1)_{L^2}(u_0|v)_{L^2} \\ &= (u|(u_0|v)_{L^2})_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit $T'v = (u_0|v)_{L^2}1$: da aber $1 \not\in L^2(\mathbb{R})$ muss $(u_0|v)_{L^2} = 0$ sein, d.h., $D(T') \perp u_0$ und somit ist $\overline{D(T')} \neq X$ (mit $T'_{|D(T')} \equiv 0$) $\Rightarrow$ T ist nicht abschließbar.

X Banachraum, $T : X \supset D(T) \to X$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Definition.

Die Resolventemenge $\rho(T)$ ist die Menge

$$\rho(T) \quad := \quad \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{Id} - T : D(T) \to X \text{ ist invertierbar und } (\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Ist $\lambda \in \rho(T)$, so heißt

$$R(\lambda, T) := (\lambda \operatorname{Id} - T)^{-1}$$

Resolventenoperator von T an der Stelle λ.
Das Spektrum $\sigma(T)$ ist die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Anmerkung.

Ist $T : X \supset D(T) \to X$ *linear und invertierbar, so ist* $R(\lambda, T)$ *genau dann beschränkt, wenn* T *abgeschlossen ist (dank dem Satz vom abgeschlossenen Graphen).*

X Banachraum, $T : X \supset D(T) \to X$ Operator mit $\rho(T) \neq \emptyset$
(und somit notwendigerweise abgeschlossen)

Satz.
Ist $\mathcal{I}$ ein Operatorenideal, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $R(\lambda, T) \in \mathcal{I}$ *für ein (und somit für alle)* $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) $\iota \in \mathcal{I}$.

(ι ist der Einbettungsoperator $[D(T)] \hookrightarrow X$*.)*

Beweis

- Sei $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist $|||x|||_\lambda := \|\lambda x - Tx\|_X$ eine äquivalente Norm auf $[D(T)]$, denn

$$\begin{aligned} \|x\|_T &\leq \|R(\lambda, T)(\lambda - T)x\|_X + \|\lambda x - Tx\|_X + |\lambda|\|x\|_X \\ &\leq (1 + |\lambda|)(\|R(\lambda, T)\| + 1)\|\lambda x - Tx\|_X =: M|||x|||_\lambda. \end{aligned}$$

- $R(\lambda, T) : X \to [D(T)]$ ist also ein Isomorphismus mit beschränkter Inverse $\lambda \operatorname{Id} - T$.
- Nun, $\iota = R(\lambda, T)(\lambda \operatorname{Id} - T)$ und $R(\lambda, T) = \iota \circ R(\lambda, T)$.
- Idealeigenschaft $\Rightarrow$ Aussage.

Spektralabbildungssatz (SAS) für Resolventenoperatoren

X Banachraum, $T : X \supset D(T) \to X$ Operator, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.
Ist $\rho(T) \neq \emptyset$, so gilt

$$\sigma(R(\lambda, T))\setminus\{0\} = (\lambda - \sigma(T))^{-1} := \{(\lambda-\mu)^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in \sigma(T)\}.$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für σ_p, σ_a, σ_r.

Beweis

- Sind $\mu \neq 0$ und $\lambda \in \rho(T)$, so gilt

$$(\mu \operatorname{Id} - R(\lambda, T))x = \begin{cases} \mu \left(\left(\lambda - \mu^{-1}\right) \operatorname{Id} - T \right) R(\lambda, T)x & \text{falls } x \in X \\ \mu R(\lambda, T) \left(\left(\lambda - \mu^{-1}\right) \operatorname{Id} - T \right) x & \text{falls } x \in D(T). \end{cases}$$

- Somit

$$\ker(\mu \operatorname{Id} - R(\lambda, T)) = \ker \left(\left(\lambda - \mu^{-1}\right) \operatorname{Id} - T \right)$$

  und

$$\operatorname{Rg}(\mu \operatorname{Id} - R(\lambda, T)) = \operatorname{Rg} \left(\left(\lambda - \mu^{-1}\right) \operatorname{Id} - T \right).$$

- Definitionen von σ_p, σ_a, σ_r $\Rightarrow$ Aussagen.

X Banachraum, $T : X \supset D(T) \to X$ Operator, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Korollar.

Hat T kompakte Resolventenoperatoren, so hat T reines Punktspektrum. Weiter gilt:
Entweder ist $\sigma(T)$ endlich oder besteht $\sigma(T)$ aus einer Folge, die ∞ als einzigen Häufungspunkt hat.

Anmerkung.

Die meisten Eigenschaften von $\sigma(T)$ und $\rho(T)$ sind für abgeschlossene, dicht definierte T gleich wie bei beschränkten T. Doch gilt jetzt i.A.:

- $\sigma(T)$ *ist nicht kompakt.*
- $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Z.B.: Sei

$$\begin{aligned} D_1(D) &:= C^1([0,1]) \\ D_2(D) &:= \{u \in C^1([0,1]) : u(1) = 0\} \\ Du &:= u'. \end{aligned}$$

- $\mathbb{C} = \sigma((D, D_1(D))$: *zu wenige Randbedingungen! Somit* $s \mapsto e^{\lambda s}$ *ist Eigenvektor* $\forall \lambda$.
- $\mathbb{C} = \rho((D, D_2(D))$: *zu viele bzw. falsche Randbedingungen! Ascoli–Arzelà* $\Rightarrow \sigma = \sigma_p$ *und* $\lambda \in \sigma_p \Rightarrow \exists$ *Eigenvektor der Form* $e(s) := \alpha e^{\lambda s}$ *für ein* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Aber* $e(1) \neq 0$ *(und somit* $e \notin D_2(D)$*)* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Beispiel

Satz.

Der Operator

$$
\begin{aligned}
D(\Delta_N) &:= \{u \in C^2([0,1]) : u'(0) = u'(1) = 0\} \\
\Delta_N u &:= u''
\end{aligned}
$$

auf $C([0,1])$ hat reines Punktspektrum mit (höchstens) abzählbar vielen Eigenwerten.

Beweis.

- Die Gleichung $u - u'' = f$ hat genau eine Lösung $\forall f \in C([0,1])$.
- Somit ist $1 \in \rho(\Delta_N)$.
- Ascoli–Arzelà $\Rightarrow \iota : D(\Delta_N) \to C([0,1])$ ist kompakt

□

Und für Operatoren auf L^p-Räumen?

Beispiel

Satz.

Der Operator

$$\begin{aligned} D(\Delta_N) &:= \{u \in C^2([0,1]) : u'(0) = u'(1) = 0\} \\ \Delta_N u &:= u'' \end{aligned}$$

auf $C([0,1])$ *hat reines Punktspektrum mit (höchstens) abzählbar vielen Eigenwerten.*

Beweis.

- Die Gleichung $u - u'' = f$ hat genau eine Lösung $\forall f \in C([0,1])$.
- Somit ist $1 \in \rho(\Delta_N)$.
- Ascoli–Arzelà $\Rightarrow \iota : D(\Delta_N) \to C([0,1])$ ist kompakt

$\square$

Und für Operatoren auf L^p-Räumen?

Motivation für die Einführung der Sobolevräume

Betrachte $f \in C^1([0,1])$. Dann gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = \Big[f(x)\overline{g(x)}\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx.$$

$\forall g \in C^1([0,1])$.
Inbesondere gilt

$$\int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = -\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx \qquad \forall g \in C_c^1(0,1)$$

Diese Integralformel definiert eine wesentliche Eigenschaft der diff'baren Funktionen, *sie benötigt aber nur eine f.ü. definierte Funktion*.

Sobolev-Räume – 1-dim

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $p \in [1, \infty]$

Definition. (S.L. Sobolev 1936)

$f \in L^1_{loc}(I)$ heißt schwach differenzierbar falls $\exists f' := g \in L^1_{loc}(I)$ s.d.

$$\int_I f\overline{h'}\, d\lambda = -\int_I g\overline{h}\, d\lambda$$

$\forall h \in C^1_c(I)$.
Der erste p-Sobolevraum, $W^{1,p}(I)$, ist

$$\{f \in L^p(I) : f \text{ schwach diff'bar mit } f' \in L^p(I)\}.$$

Sergei Lvovich Sobolev (1908–1989)

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

Satz.

$\forall f \in W^{1,p}(I)\ \exists | f' \in L^p(I)$.

Beweis.

- Ist g eine weitere schwache Ableitung von f, so gilt
$$\int_I (f'-g)\overline{h}\, d\lambda = -\int_I (f-f)\overline{h'}\, d\lambda = 0 \qquad \forall h \in C_c^1(I).$$
- $\overline{C_c^1(I)} = L^q(I)\ \forall q$, also insbesondere für $q = p'$ mit $p^{-1} + p'^{-1} = 1 \Rightarrow$
$$\int_I (f'-g)\overline{h}\, d\lambda = 0 \qquad \forall h \in L^{p'}(I).$$
- Für $h := |f'-g|^{p-1}\mathrm{sign}(f'-g)$ gilt somit
$$\|f'-g\|_p^p = 0.$$

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

Satz.

$\forall f \in W^{1,p}(I) \; \exists | f' \in L^p(I).$

Beweis.

- Ist g eine weitere schwache Ableitung von f, so gilt

$$\int_I (f' - g)\overline{h} \, d\lambda = -\int_I (f - f)\overline{h'} \, d\lambda = 0 \qquad \forall h \in C_c^1(I).$$

- $\overline{C_c^1(I)} = L^q(I) \; \forall q$, also insbesondere für $q = p'$ mit $p^{-1} + p'^{-1} = 1 \Rightarrow$

$$\int_I (f' - g)\overline{h} \, d\lambda = 0 \qquad \forall h \in L^{p'}(I).$$

- Für $h := |f' - g|^{p-1}\mathrm{sign}(f' - g)$ gilt somit

$$\|f' - g\|_p^p = 0.$$

Fundamentales Beispiel

Beispiel.

Sei $I := (-1,1)$ *und* $f : I \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. *Dann gilt* $f \notin C^1(I)$ *aber* $f \in W^{1,p}(I)\ \forall p \in [1,\infty]$, *mit*

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \textit{falls } x \in (-1,0) \\ 1 & \textit{falls } x \in (0,1). \end{cases}$$

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

Satz.

- *$W^{1,p}(I)$ ist ein Banachraum $\forall p \in [1, \infty]$, bzgl.*

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \big(\|f\|_{L^p}, \|f'\|_{L^p}\big)_{\ell^p} \qquad f \in W^{1,p}(I).$$

- *$H^1(I) := W^{1,2}(I)$ ist ein Hilbertraum.*

(Aber die Norm

$$|||f|||_{W^{1,p}} := \big(\|f\|_{L^p}, \|f'\|_{L^p}\big)_{\ell^q} \qquad f \in W^{1,p}(I).$$

ist äquivalent $\forall q \in [1, \infty]$.)

Beweis

- Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(I)$ Cauchy. Somit sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $L^p(I)$.
- $L^p(I)$ Banachraum $\Rightarrow \exists f, g \in L^p(I)$ s.d. $f_n \to f$ und $f_n' \to g$.
- Es gilt
$$\int_I f_n \overline{h'}\, d\lambda = -\int_I f_n' \overline{h}\, d\lambda \qquad \forall h \in C_c^1(I).$$
- Somit

$$\begin{aligned}\int_I f \overline{h'}\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \overline{h'}\, d\lambda \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_I f_n' \overline{h}\, d\lambda = -\int_I g \overline{h}\, d\lambda \qquad \forall h \in C_c^1(I),\end{aligned}$$

d.h. $g = f'$ und $f_n \to f$ in $W^{1,p}(I)$.

Fundamentales Beispiel

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

Beispiel.

$$T : W^{1,p}(I) \ni f \mapsto f' \in L^p(I)$$

ist ein unbeschränkter Operator auf $L^p(I)$*. Er ist beschränkt als Operator von* $W^{1,p}(I)$ *nach* $L^p(I)$*. Weil* $(D(T), \|\cdot\|_T) = W^{1,p}(I)$ *ein Banachraum ist, ist* T *abgeschlossen.*

Sobolev-Räume – N-dim

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet, $p \in [1, \infty]$

Definition.

$f \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt *schwach differenzierbar* *falls*
$\exists \nabla f := (g_1, \ldots, g_N) \in \left(L^1_{loc}(\Omega)\right)^N$ *s.d.*

$$\int_\Omega f(x)\overline{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)}dx = -\int_\Omega g_i(x)\overline{h(x)}dx \qquad \forall h \in C^1_c(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, N.$$

Der *erste p-Sobolevraum*, $W^{1,p}(\Omega)$, *ist*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : f \text{ schwach diff'bar mit } \nabla f \in \left(L^p(\Omega)\right)^N\},$$

und rekursiv:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in W^{k-1,p}(\Omega) : \\ f \text{ schwach diff'bar mit } \nabla f \in \left(W^{k-1,p}(\Omega)\right)^N\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet, $p \in [1, \infty]$

Satz.

$W^{k,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum bzgl.

$$\begin{aligned} \|f\|^p_{W^{k,p}} &:= \|f\|^p_{W^{k-1,p}} + \|\nabla f\|^p_{W^{k-1,p}} \\ &\simeq \sum_{|\alpha|=0^k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p}. \end{aligned}$$

$W^{k,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum bzgl.

$$(f|g)_{W^{k,2}} := \sum_{|\alpha|=0^k} (D^\alpha f | D^\alpha g)_{L^2}.$$

Fundamentales Anwendungsbeispiel

Ist $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ und gilt

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \qquad x \in [0,1]$$

mit

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

so gilt $\forall \phi \in C^1([0,1])$

$$(\lambda u(x) - u''(x))\overline{\phi(x)} = f(x)\overline{\phi(x)}, \qquad x \in [0,1],$$

und somit (partielle Integration)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\overline{\phi(x)}dx &= \int_0^1 (\lambda u(x) - u''(x))\overline{\phi(x)}dx \\
&= \lambda \int_0^1 u(x)\overline{\phi}(x)dx + \int_0^1 u'(x)\overline{\phi'}(x)dx \\
&\qquad -u'(1)\overline{\phi(1)} + u'(0)\overline{\phi(0)} \\
&= \lambda \int_0^1 u(x)\overline{\phi}(x)dx + \int_0^1 u'(x)\overline{\phi'}(x)dx.
\end{aligned}$$

Somit:

Definition.

$u : (0,1) \to \mathbb{K}$ heißt schwache Lösung von

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

mit Neumann-Randbedingungen

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

falls $u \in H^1(0,1)$ und

$$\int_0^1 f(x)\overline{\phi(x)}dx = \lambda \int_0^1 u(x)\overline{\phi}(x)dx + \int_0^1 u'(x)\overline{\phi'}(x)dx \qquad \forall \phi \in C^1([0,1]).$$

Die Randbedingungen sind in der intergralen Formulierung nur implizit gestellt!

Theorem.
Sei $f \in L^2(0,1)$, $\lambda > 0$. *Dann hat*

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

mit Randbedingungen

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

genau eine schwache Lösung u_f. *Weiter gilt*

$$\exists C > 0 \quad s.d. \quad \|u_f\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2} \; \forall f \in L^2(0,1).$$

Beweis

- Definiere ein äquivalentes Skalaprodukt auf $H^1(0,1)$ durch $\lambda(u|v)_{L^2} + (u'|v')_{L^2}\ \forall u, v \in H^1(0,1)$.
- Sei $f \in L^2(0,1)$ und definiere
$$\Psi : H^1(0,1) \ni \phi \mapsto (\phi|f)_{L^2} \in \mathbb{K}.$$
- $\Psi \in (H^1(0,1))'$
- Riesz–Fréchet $\Rightarrow \exists| u \in H^1(0,1)$ s.d. $\langle \Psi, \phi \rangle = (\phi|u)_{H^1}$ $\forall \phi \in H^1(0,1)$
- Somit $(\phi|f)_{L^2} = \lambda(\phi|u)_{L^2} + (\phi'|u')_{L^2}\ \forall \phi \in C^1([0,1]) \hookrightarrow H^1(0,1)$.
- D.h., u ist schwache Lösung.
- Isometrie des Identifikationsoperators $H^1(0,1) \leftrightarrow (H^1(0,1))' \Rightarrow$ *a-priori*-Abschätzung $\|u_f\|_{H^1} \le \|\Psi\|_{(H^1)'}$.
- $H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1) \simeq (L^2(0,1))' \hookrightarrow (H^1(0,1))' \Rightarrow$ $\|\Psi\|_{(H^1)'} \le \|f\|_{L^2}$.
- $\Rightarrow$ *a-priori*-Abschätzung $\|u_f\| \le \|f\|_{L^2}$.

Viele weitere Eigenschaften von Sobolev-Räumen sind bekannt, sie beruhen aber eher auf Methoden der PDGn bzw. spielen eher in den PDGn eine Rolle: z.B.

- Schwache Differenzierbarkeit $\Leftrightarrow$ Differenzierbarkeit f.ü.;
- schwache Ableitung(en) f.ü. $\equiv 0 \Rightarrow$ Funktion ist konstant f.ü.;
- Möglichkeit, einen *beschränkten* Punktauswertungsoperator $W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ zu definieren, für k groß genug;
- Existenz äquivalenter Normen auf $W^{k,p}(\Omega)$, die Mittelwerte oder Randwerte der Funktionen beinhalten (Poincaré-Ungleichungen);
- Dichtheit von $C^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ für alle k, p (Theorem von Meyers–Serrin, 1964);

- Möglichkeit, Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Xi)$ für allgemeinere Mannigfaltigkeiten zu definieren;
- Möglichkeit, Sobolev-Räume $W^{s,p}(\Xi)$ für $s \in \mathbb{R}$ zu definieren;
- Möglichkeit, Sobolev-Räume durch Fourier-Transformationen (äquivalent) zu definieren;
- Einbettungen von $W^{k,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ bzw. $C(\overline{\Omega})$ für k, p groß genug (Sobolevsche Einbettungssätze);
- Möglichkeit, Sobolevräume auf atomischen Maßräumen zu definieren (Sobolevräume auf Graphen);
- ...

Kompaktheitsresultate

I offenes Intervall, $p \in (1, \infty]$

Theorem.

Ist I beschränkt, so gilt

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$$

mit kompakter Einbettung.

Korollar.

Ist I beschränkt, so ist die Einbettung

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^p(I)$$

kompakt.

Vorbereitendes Resultat

I offenes Intervall, $p \in [1, \infty]$

Satz.

(1) *Sei* $g \in L^1_{loc}(I)$ *und* $x_0 \in I$. *Sei* $G : I \ni x \mapsto \int_{x_0}^x g(t)dt \in \mathbb{K}$. *Dann ist* $G \in C(I)$ *und*

$$\int_I G(x)\overline{h'(x)}dx = -\int_I g(x)\overline{h(x)}dx \quad \forall h \in C^1_c(I).$$

(2) *Somit* $\forall f \in W^{1,p}(I)\ \exists | f^* \in C(\bar{I})$ *s.d.* $f(x) = f^*(x)$ *für f.a.* $x \in I$ *und*

$$\|f^*\|_{C(\bar{I})} \leq \|f\|_{W^{1,p}(I)},$$

kurz: $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$.

Beweis.
[ÜA]

Beweis des Satzes

- Sei $u \in \{f \in W^{1,p}(I) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$.
- Dann gilt für $q^{-1} = 1 - p^{-1}$

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u'(s)\, ds \right| \leq \|u'\|_p \|\mathbf{1}_{(x,y)}\|_q \leq |x - y|^{\frac{1}{q}}.$$

- Somit ist $\{f \in W^{1,p}(I) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$ gleichgradig stetig.
- $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}) \Rightarrow \{f \in W^{1,p}(I) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$ ist beschränkt.
- Ascoli–Arzelà $\Rightarrow$ Aussage.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet mit C^1-Rand, $p \in [1, \infty)$

Satz. (F. Rellich 1930 & V.I. Kondrachov 1945)
Ist Ω beschränkt, so ist die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

kompakt.

1. Vorbereitendes Resultat

(M, d_M) metrischer Raum

Lemma (H. Hanche-Olsen & H. Holden 2010)

M ist präkompakt, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists (W, d_W)$ metrischer Raum $\exists \Phi : M \to W$ s.d.

- *$\Phi(M)$ ist präkompakt und*
- *$\forall x, y \in M\ d_W(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta \Rightarrow d_M(x, y) < \epsilon$.*

Beweis.

- Sei $\epsilon > 0$ und betrachte δ, W, Φ.
- $\Phi(M)$ präkompakt $\Rightarrow \exists W' \subset \Phi(M)$ s.d.
  - W' ist endlich und
  - $\Phi(M) \subset \bigcup_{y \in W'} B_\delta(y)$.
- Nun: Φ-Urbilder von δ-Kugeln sind in ϵ-Kugeln enthalten $\Rightarrow$

$$M \subset \bigcup_{y \in W'} \Phi^{-1}(B_\delta(y)).$$

1. Vorbereitendes Resultat

(M, d_M) metrischer Raum

Lemma (H. Hanche-Olsen & H. Holden 2010)

M ist präkompakt, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \exists (W, d_W)$ metrischer Raum $\exists \Phi : M \to W$ s.d.

- *$\Phi(M)$ ist präkompakt und*
- *$\forall x, y \in M\ d_W(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta \Rightarrow d_M(x, y) < \epsilon$.*

Beweis.

- Sei $\epsilon > 0$ und betrachte δ, W, Φ.
- $\Phi(M)$ präkompakt $\Rightarrow \exists W' \subset \Phi(M)$ s.d.
  - W' ist endlich und
  - $\Phi(M) \subset \bigcup_{y \in W'} B_\delta(y)$.
- Nun: Φ-Urbilder von δ-Kugeln sind in ϵ-Kugeln enthalten $\Rightarrow$

$$M \subset \bigcup_{y \in W'} \Phi^{-1}(B_\delta(y)).$$

2. Vorbereitendes Resultat

$p \in (1, \infty)$, $X \subset L^p(\mathbb{R}^N)$

Theorem. (A.N. Kolmogorov 1931 & M. Riesz 1933)

X ist genau dann relativ kompakt, wenn

(1) *X beschränkt ist,*

(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists R > 0$ *s.d.* $\forall f \in X$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p \, dx < \epsilon^p,$$

(3) $\forall \epsilon > 0\ \exists \rho > 0$ *s.d.* $\forall f \in X\ \forall y \in \mathbb{R}^N$

$$\|y\| < \rho \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx < \epsilon^p.$$

$p \in (1, \infty)$, $X \subset L^p(\mathbb{R}^N)$

Korollar.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen mit $|\Omega| < \infty$, so ist $\{f_{|\Omega} : \Omega \to \mathbb{K} : f \in X\}$ relativ kompakt in $L^p(\Omega)$, falls

(1) *X beschränkt ist,*

(2) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \rho > 0$ *s.d.* $\forall f \in X \; \forall y \in \mathbb{R}^N$

$$\|y\| < \rho \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx < \epsilon^p.$$

Beweis [Hanche-Olsen–Holden 2010] - "$\Leftarrow$" 1

- Sei $\epsilon > 0$ und wähle R, ρ wie in (2) bzw. (3).
- Sei $Q := \prod_{i=1}^N (-a_i, a_i) \subset \mathbb{R}^N$ mit a_i klein genug, dass $Q \subset B_{\frac{\rho}{2}}(0)$.
- Seien $Q_1, \ldots, Q_m$ Kopien von Q s.d. $B_R(0) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^m Q_j}$.
- Definiere $P \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^N))$ f.ü. durch

$$(Pf)(x) := \begin{cases} |Q_i|^{-1} \int_{Q_i} f(z)\, dz & \text{falls } x \in Q_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|f - Pf\|_p^p &< \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |f(x) - Pf(x)|^p\, dx \\ &= \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \left| |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} (f(x) - f(z))\, dz \right|^p dx. \end{aligned}$$

Beweis [Hanche-Olsen–Holden 2010] - "$\Leftarrow$" 2

- Da $x - z \in 2Q\ \forall x, z \in Q_i$, Jensen und (3) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\|f - Pf\|_p^p &\leq \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} |f(x) - f(z)|^p \; dz\, dx \\
&= \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |Q_j|^{-1} \int_{2Q} |f(x) - f(x+y)|^p \; dy\, dx \\
&\leq \epsilon^p + |Q|^{-1} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x+y)|^p \; dx\, dy \\
&= \epsilon^p + |Q|^{-1} \int_{2Q} \epsilon^p dy = (2^N + 1)\epsilon^p.
\end{aligned}
$$

- Somit $\|f\|_p < (2^N + 1)^{\frac{1}{p}} \epsilon + \|Pf\|_p\ \forall f \in X$.
- $\|Pf - Pg\|_p < \epsilon \Rightarrow \|f - g\|_p < ((2^N + 1)^{\frac{1}{p}} + 1)\epsilon\ \forall f, g \in X$.
- $\|P\| \leq 1$ und X beschränkt $\Rightarrow$ $P(X)$ ist beschränkt und endlich-dimensional, somit relativ kompakt.
- Lemma von Hanche-Olsen–Holden $\Rightarrow$ X ist relativ kompakt.

Beweis [Hanche-Olsen–Holden 2010] - "⇒" 1

- Relativ kompakte Mengen sind immer beschränkt ⇒ (1).
- Sei $\epsilon > 0$ und $X' \subset X$ endlich s.d. $X \subset \bigcup_{f \in X'} B_\epsilon(f)$. Sei $R > 0$ groß genug dass

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p \, dx < \epsilon^p \qquad \forall f \in X'.$$

- Ist $f \in X'$ und $g \in B_\epsilon(f)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f - g\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon
\end{aligned}$$

und somit gilt (2).

Beweis [Hanche-Olsen–Holden 2010] - "⇒" 2

- Es reicht z.z., dass (3) gilt.
- (3) gilt automatisch für einzelne Funktionen, da $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^N)$ ist.
- Sei $\epsilon > 0$ und $X' \subset X$ endlich s.d. $X \subset \bigcup_{f \in X'} B_\epsilon(f)$. Sei $\rho > 0$ klein genug dass

$$y \in B_\rho(0) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx < \epsilon^p \qquad \forall f \in X'.$$

- Ist $f \in X'$ und $g \in B_\epsilon(f)$, so gilt

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x+y) - g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad & \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x+y) - f(x+y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ & + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ & + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < 3\epsilon\end{aligned}$$

und somit gilt (3).

3. vorbereitendes Resultat

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet mit C^1-Rand

Theorem.
$\exists \Theta \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ *und* $\exists C > 0$ *s.d.*

- $(\Theta u)_{|\Omega}) = u$,
- $\|\Theta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$ *und*
- $\|\Theta u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$. Θ *heißt Erweiterungsoperator.*

Der Beweis ist sehr technisch und langwierig, vgl. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Thm. 9.7.

4. Vorbereitendes Resultat

$p \in [1, \infty]$

Lemma

Ist $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \leq \|\nabla f\|_p |y| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Zum Beweis: s. z.B. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Prop. 9.3.

Beweis des Satzes von Rellich–Kondrachov

- Sei $B := \{f \in W^{1,p}(\Omega) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$.
- Ω hat C^1-Rand $\Rightarrow \exists\ \Theta$ Erweiterungsoperator.
- $\Theta(B)$ ist beschränkt in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ und somit in $L^p(\mathbb{R}^N)$.
- Voriges Lemma $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p\, dx \leq \|\nabla f\|_p |y|\ \forall y \in \mathbb{R}^N$ $\forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
- Somit
$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p\, dx \leq C|y| \quad \forall y \in \mathbb{R}^N\ \forall f \in \Theta(B).$$
- Kolmogorov–Riesz $\Rightarrow$ Aussage.

Eine Anwendung an Differenzialgleichungen

Um die Gleichung

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

mit Neumann-Randbedingungen

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

zu untersuchen müsste man den Operator

$$\begin{aligned} D(\Delta_N) &:= \{u \in H^2(0,1) : u'(0) = u'(1) = 0\} \\ \Delta_N u &:= u'' \end{aligned}$$

auf $L^2(0,1)$ einführen.
Oder: man führt den Operator nur "schwach" ein – man kann mit PDGn-Methoden zeigen, dass die beiden Definitionen übereinstimmen.

Schwache 2. Ableitung mit Neumann-Randbedingungen

Satz.

Der Operator

$$\begin{aligned} D(\Delta_N) &:= \{u \in H^1(0,1) : \exists v \in L^2(0,1) \text{ s.d. } \\ &\qquad (u'|w')_{L^2} = (v|w)_{L^2}\ \forall w \in H^1(0,1)\} \\ \Delta_N u &:= -v \end{aligned}$$

auf $L^2(0,1)$ hat reines Punktspektrum mit (höchstens) abzählbar vielen Eigenwerten.

Beweis.

- Die Gleichung $(u|w)_{L^2} - (\Delta_N u|w)_{L^2} = (f|w)_{L^2}\ \forall w \in H^1(0,1)$ hat genau eine Lösung $u_f\ \forall f \in L^2(0,1)$.
- Somit ist $1 \in \rho(\Delta_N)$.
- Rellich–Khondrakov $\Rightarrow \iota : D(\Delta_N) \to L^2(0,1)$ ist kompakt.

Schwache 2. Ableitung mit Neumann-Randbedingungen

Satz.

Der Operator

$$\begin{aligned} D(\Delta_N) &:= \{u \in H^1(0,1) : \exists v \in L^2(0,1) \text{ s.d.} \\ &\qquad\qquad (u'|w')_{L^2} = (v|w)_{L^2}\ \forall w \in H^1(0,1)\} \\ \Delta_N u &:= -v \end{aligned}$$

auf $L^2(0,1)$ hat reines Punktspektrum mit (höchstens) abzählbar vielen Eigenwerten.

Beweis.

- Die Gleichung $(u|w)_{L^2} - (\Delta_N u|w)_{L^2} = (f|w)_{L^2}\ \forall w \in H^1(0,1)$ hat genau eine Lösung u_f $\forall f \in L^2(0,1)$.
- Somit ist $1 \in \rho(\Delta_N)$.
- Rellich–Khondrakov $\Rightarrow \iota : D(\Delta_N) \to L^2(0,1)$ ist kompakt.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet

Satz.

- *$W^{1,p}(\Omega)$ ist gleichmäßig konvex (und somit reflexiv) $\forall p \in (1, \infty)$.*
- *$W^{1,p}(\Omega)$ ist separabel $\forall p \in [1, \infty)$.*

Lemma

Ist ein Banachraum X gleichmäßig konvex, so ist auch jeder abgeschlossene Unterraum von X gleichmäßig konvex.

Beweis.

Einfach die Definition von glm. konv. anwenden. $\square$

Beweis des Satzes

- $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex/reflexiv $\Rightarrow \left(L^p(\Omega)\right)^{N+1} \simeq L^p(\tilde{\Omega})$ gleichmäßig konvex/reflexiv, wobei $\tilde{\Omega}$ die Vereinigung $N+1$ disjunkter Kopien von Ω ist.
- $T : W^{1,p}(\Omega) \ni f \mapsto (f, \mathrm{grad} f) \in \left(L^p(\Omega)\right)^{N+1}$ ist eine Isometrie.
- Somit ist $T(W^{1,p}(\Omega))$ ein abgeschlossener Unterraum von $\left(L^p(\Omega)\right)^{N+1}$.
- Somit ist $T(W^{1,p}(\Omega))$ und auch $W^{1,p}(\Omega)$ gleichmäßig konvex/reflexiv. [Warum? ÜA]

Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet

Definition.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ bzgl. der $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$-Norm.

Anmerkung.

Hat Ω C^1-Rand und ist $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. So ist genau dann $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, wenn $u_{|\partial\Omega} = 0$.

Zum Beweis: vgl. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Thm. 9.17.

Der Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offenes Gebiet

Satz.

Ist $\phi \in W^{-1,p}(\Omega) := \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, *so* $\exists$ $f_0, f_1, \ldots, f_N \in (L^p(\Omega))'$ *mit*

$$\langle \phi, u\rangle = \int_\Omega f_0 u \, d\lambda + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j u' \, d\lambda.$$

Formal gilt

$$\int_\Omega f_j u' \, d\lambda = -\int_\Omega f_j' u \, d\lambda$$

(das ist korrekt, falls f_j diff'bar). Somit kann man $W^{-1,p}(\Omega)$ ansehen als den Raum der schwachen Ableitungen von $L^p(\Omega)$-Funktionen.

Beweis

- Betrachte die Isometrie
  $T: W_0^{1,p}(\Omega) \ni f \mapsto (f, \mathrm{grad} f) \in \left(L^p(\Omega)\right)^{N+1}$.
- $S := T^{-1} : \left(L^p(\Omega)\right)^{N+1} \supset T\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right) \to W_0^{1,p}(\Omega)$.
- $T\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right) \ni h \mapsto \langle \phi, Sh \rangle \in \mathbb{K}$ ist ein stetiges lineares Funktional auf $T\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)$.
- Hahn–Banach $\Rightarrow \exists$ eine Erweiterung $\Psi \in \left(\left(L^p(\Omega)\right)^{N+1}\right)'$ mit gleicher Norm $\|\phi\|$.
- Riesz–Fréchet $\Rightarrow \exists f_0, f_1, \ldots, f_N \in (L^p(\Omega))'$ s.d.

$$\langle \Psi, u \rangle = \int_\Omega f_0 u_0 \, d\lambda + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j u_j \, d\lambda$$

  $\forall u \in L^p(\Omega)\big)^{N+1}$.
- Insbesondere

$$\langle \phi, u \rangle = \langle \Psi, Tu \rangle = \int_\Omega f_0 u_0 \, d\lambda + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j u_j' \, d\lambda$$

  $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.