Analysis 1

Delio Mugnolo

delio.mugnolo@uni-ulm.de

(Version von 18. Dezember 2012)

Dies ist das Skript zur Vorlesung *Analysis 1*, welche ich im Sommersemester 2012 an der Universität Ulm gehalten habe.

Es ist durchaus möglich, dass ich im Text Fehler vergessen habe. Ich werde jedem/jeder dankbar sein, der/die mich darauf hinweisen wird – am besten direkt an `delio.mugnolo@uni-ulm.de`.

Ulm, den 18. Dezember 2012 Delio Mugnolo

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundlagen: Logik und Mengenlehre 5
1.1. Ergänzungen zu Kombinatorik 16

Kapitel 2. Funktionen 19

Kapitel 3. Algebraische Strukturen und Ordnungseigenschaften von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 25

Kapitel 4. Konvergenz von Folgen 37

Kapitel 5. Häufungspunkte und Cauchy-Folgen 51
5.1. Der Körper $\mathbb{C}$ 54
5.2. Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ 57

Kapitel 6. Reihen 61
6.1. Potenzreihen 69

Kapitel 7. Stetige Funktionen und Elemente der Topologie 75
7.1. Elemente der Topologie 79
7.2. Stetigkeit 80

Kapitel 8. Differentialrechnung von Funktionen einer Variabel 91
8.1. Folgerungen vom Satz von Rolle 98

Literaturverzeichnis 105

KAPITEL 1

Grundlagen: Logik und Mengenlehre

In der Mathematik betrachtet man nur **Aussagen** oder **Prädikate**, die „entscheidbar“ sind, also von denen es möglich ist zu sagen, ob sie „wahr“ sind, oder „falsch“; z.B. die Aussagen „1+1=2“ und „Mehr als 30.000 Studenten sind an der Universität Ulm immatrikuliert“ sind beides entscheidbare Aussagen (und insbesondere ist die erste wahr und die zweite falsch), während die Aussage „Mein Hund ist intelligenter als deine Katze“ nicht entscheidbar ist. Wohlgemerkt, eine entscheidbare Aussage braucht nicht *leicht* entscheidbar zu sein: z.B. die Aussage „$2^{43112609} - 1$ ist eine Primzahl“.

In dieser Vorlesung setzen wir die Grundlagen der Logik, insbesondere die Begriffe von *Aussage* und *Wahrheit* voraus. Für eine ausführlichere Einführung verweisen wir auf Lehrbücher, etwa [**1**, Appendix], aber eine intuitive Vorstellung dieser Begriffe wird ausreichen. Übrigens, $2^{43112609} - 1$ ist tatsächlich eine Primzahl, wie es 2008 bewiesen wurde.

Die Folgende Definition gilt als Startpunkt der moderner Mengenlehre. Wir werden sie *verbatim* zitieren und wortlich akzeptieren, trotz ihrer (nur scheinbaren!) Ungenauigkeit. Sie wurde von Georg Cantor 1895 vorgeschlagen.

cantor DEFINITION 1.1. *Unter einer* ***Menge*** *verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die* ***Elemente*** *von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Wenn ein Objekt x zu einer Menge M gehört schreibt man $x \in M$. Besteht M aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so schreibt man $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (oder manchmal $M := \{x_1, \ldots, x_n\}$, wenn wir die Menge M gerade definieren). Wohlgemerkt: eine Menge darf auch unendlich viele Elemente enthalten. Nach Definition sind alle Elemente einer Menge notwendigerweise paarweise unterschiedlich.

paarwunter BEISPIEL 1.2. Also bildet z.B. $\{1\}$ eine Menge (die nur aus 1 besteht), aber $\{1, 1\}$ nicht. Ähnlich ist $\{\text{Berlin}\}$ eine Menge, doch ist $\{\text{Berlin}, \text{Hauptstadt von Deutschland}, \text{Stuttgart}\}$ keine Menge. □

Sind zwei Objekte x, y *wohlunterscheidbar*, so kann man die Begriffe von Gleichheit und Ungleichheit von x, y als wohldefiniert voraussetzen. In diesem Fall schreibt man $x = y$ bzw. $x \neq y$.

DEFINITION 1.3. *Zwei Mengen M, N heißen* ***gleich****, und man schreibt*

$$M = N,$$

falls sie die selben Elemente enthalten, d.h.: Ist $m \in M$, so ist $m \in N$, und umgekehrt ist $m \in N$, so ist $m \in M$.

Mit der obigen Definition 1.1 sollte man vorsichtig umgehen. Bereits 1901 hat der Mathematiker, Philosoph und Nobelpreisträger Bertrand Russell gemerkt, dass eine naive Anwendung der Definition zu Paradoxa führen kann, etwa dem folgenden

SATZ 1.4 (Russelsche Antinomie). *Es gibt keine Menge R aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten.*

BEWEIS. Angenommen R enthält sich selbst, dann gilt aufgrund der Eigenschaft, mit der R definiert wurde, dass R sich nicht enthält, was der Annahme widerspricht. Angenommen es gilt das Gegenteil und R enthält sich nicht selbst, dann erfüllt R die Eigenschaft, so dass R sich doch selbst enthält entgegen der Annahme. □

Wir wollen auf eine axiomatische Einführung der Mengenlehre, wie die von Ernst Zermelo und Abraham Adolf Fraenkel in den 1920er Jahren vorgeschlagenen, verzichten. Als Faustregel merken wir nur an, dass sich solche Paradoxa doch vermeiden lassen, wenn man bei der Einführung einer Menge R durch eine Eigenschaft immer präzisiert, aus welcher sonst (wohl!) definierten Menge die Elemente R ausgewählt werden dürfen und die möglicherweise eine oder mehrere Bedingungen erfüllen, etwa

$$\{x \in M : \text{ die Bedingung } A \text{ wird von } x \text{ erfüllt}\}.$$

Dennoch sollte gesagt werden, dass einige der Sätze und Definitionen, die in diesem Kapitel vorkommen, eigentlich *Axiome* der Zermelo–Fraenkel-Mengenlehre sind.

Definition 1.5. *Es sei M eine Menge. Eine weitere Menge N heißt* ***Teilmenge*** *von M, falls jedes Element $n \in N$ auch Element von M ist.*

Ist N eine Teilmenge von M, so schreibt man

$$N \subset M$$

(oder manchmal auch $M \supset N$).

subeq Anmerkung 1.6. Die Mengen M, N sind genau dann gleich, wenn $M \subset N$ und auch $N \subset M$ (warum?). Insbesondere ist jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Ist N eine Teilmenge von M aber $N \neq M$, so sagt man, dass N eine **echte Teilmenge** von M ist. und man schreibt

$$N \subsetneq M.$$

Definition 1.7. *Die Menge, die keine Elemente hat, heißt* ***leere Menge*** *und wird durch $\emptyset$ bezeichnet.*

Wohlgemerkt: die leere Menge $\emptyset$ ist eine wohl definierte Menge. Die Implikation „aus der Gültigkeit der Aussage A folgt die Gültigkeit der Aussage B“ ist wahr, falls die Aussage A schon falsch ist. Insbesondere ist jede Implikationf von der Form „aus $x \in \emptyset$ folgt $x \in M$“, denn *kein* Objekt ist Element von $\emptyset$. Also gilt der folgende

Satz 1.8. *Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.*

Man kann verschiedene Mengenoperationen definieren.

Definition 1.9. *Es seien M, N zwei Mengen. So definiert man die folgenden Mengen:*

- *die* ***Durchschnittsmenge*** *$M \cap N$ ist die Menge der Elementen, die sowohl in M als auch in N enthalten sind, also $x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$; ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M, N* ***disjunkt****;*
- *die* ***Differenzmenge*** *$M \setminus N$ (oder manchmal $M - N$) ist die Menge der Elementen von M, die keine Elemente von N sind, also $x \in M \setminus N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \notin N$; ist $N \subset M$, so heißt die Differenzmenge $M \setminus N$ auch* ***Komplementmenge*** *von N in M, und wird mit N^C bezeichnet oder, wenn man genauer sein will, $C_M(N)$;*
- *die* ***Vereinigungsmenge*** *$M \cup N$ ist die Menge der Elementen von M, die auch Elemente von N sind, also $x \in M \cup N$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$;*
- *die* ***symmetrische Differenzmenge*** *$M \Delta N$ von M und N ist die Menge der Elementen von M, die keine Elemente von N sind, und der Elementen von N, die keine Elemente von M sind, also $x \in M \Delta N$ genau dann, wenn entweder $x \in M$ oder $x \in N$.*

Pcup Anmerkung 1.10. Insbesondere gilt für alle Mengen M, N

$$M \cap N \subset M \subset M \cup N \qquad \text{sowie} \qquad M \cap N \subset N \subset M \cup N$$

und

$$M \setminus N \subset M\Delta N \subset M \cup N \qquad \text{sowie} \qquad N \setminus M \subset M\Delta N \subset M \cup N.$$

Falls $M \subset N$ gilt auch

$$(M^C)^C = M.$$

Eine natürliche Parallele zwischen Logik und Mengenlehre entsteht dadurch, dass man die Menge M gewisser Objekten, die eine Aussage P erfüllen, mit der Aussage identifiziert, also

$$M = \{x : P(x) \text{ gilt}\}$$

kann man mit der Prädikat

$$\forall x \in M \; P(x) \text{ gilt}.$$

Somit ist die Vereinigung von M und

$$N = \{x : Q(x) \text{ gilt}\}$$

die Menge aller Elemente, die P oder Q erfüllen, kurz: $P \vee Q$. Ähnlich ist der Durschnitt von M oder N die Menge aller Elemente, die P und Q erfüllen, kurz: $P \wedge Q$. Diese *Wahrheitswerte* kann man kompakt mithilfe zweier **Wahrheitstabellen** ausdrucken, wobei r und f für „richtig“ bzw. „falsch“ stehen:

P	Q	P∨ Q
r	r	r
r	f	r
f	r	r
f	f	f

und

P	Q	P∧ Q
r	r	r
r	f	f
f	r	f
f	f	f

So kann man auch weitere logische Operationen Definieren, etwa die **Negation** ¬ und die **Implikation** ⇒:

P	¬ P
r	f
f	r

und

P	Q	P⇒ Q
r	r	r
r	f	f
f	r	r
f	f	r

Solche Operationen lassen sich beliebig kombinieren, um neue logische Aussagen zu formulieren: z.B. ist die Äquivalenz $P \Leftrightarrow Q$ als

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

definiert und hat somit die Wahrheitstabelle

P	Q	P⇔ Q
r	r	r
r	f	f
f	r	f
f	f	r

Beispiel 1.11. Auch lassen sich kompliziertere Aussagen schrittweise und systematisch analysieren: z.B. gilt

P	Q	P⇔ (P∨ ¬Q)
r	r	r
r	f	r
f	r	r
f	f	f

da

P	Q	P$\vee$ $\neg$Q
r	r	r
r	f	r
f	r	f
f	f	r

und somit muss man nur noch die Tabelle

P	P$\vee$ $\neg$Q	P$\Leftrightarrow$ (P$\vee$ $\neg$Q)
r	r	r
r	r	r
f	f	r
f	r	f

beachten, wobei die Unterscheidung der ersten beiden Fälle überflüssig ist. □

Anmerkung 1.12. Eine Aussage, die, unabhängig vom Wahrheitswert der zugrunde liegenden Bestandteile, immer richtig ist, heißt **Tautologie**. Z.B. sind die Aussagen

$$P \Rightarrow P, \qquad P \vee \neg P$$

Tautologien.

Anmerkung 1.13. Beispielsweise sind zwei richtige Aussagen immer äquivalent, obgleich sie miteinander scheinbar nichts zu tun haben: so sind die Aussagen

- Ulm ist Hauptstadt von Baden–Württemberg
- Jede ungerade Zahl ist eine Primzahl

äquivalent. Das kann irritierend klingen.

Deshalb spricht man oft in der modernen Logik von Aussage*form*: eine Aussage ist dann speziell eine Aussageform ohne freie Variabeln. Ohne zu genau werden zu wollen: Den Unterschied wird von den Beispiele

- $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ist ein pythagoreisches Tripel
- $(3, 4, 5)$ ist ein pythagoreisches Tripel

veranschaulicht. Die letztere Aussageform hat ein Wahrheitswert (sie ist nämlich richtig), während die erste bekommt erst einen Wahrheitswert, wenn man für die Variablen Konstanten einsetzt (also m, n durch natürlichen Zahlen ersetzt) oder wenn man die freien Variablen durch Quantoren (d.h. durch $\forall$ oder $\exists$) bindet: z.B. indem man die neue Aussage

- $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ist ein pythagoreisches Tripel für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$

betrachtet.

Definition 1.14. *Zwei Aussagen heißen* ***gleich****, falls sie gleiche Wahrheitstabellen haben.*

Beispiel 1.15. Es seien P, Q Aussagen. Die Aussagen

$$P \Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \qquad \text{und} \qquad P \vee Q$$

sind gleich. □

Übungsaufgabe 1.16. Seien P, Q zwei Aussagen.

- Beweise, dass die beiden Aussagen
$$\neg\big((\neg P) \vee (\neg Q)\big), \qquad P \wedge Q$$
gleich sind.
- Beweise, dass die beiden Aussagen
$$Q \vee \neg P, \qquad P \Rightarrow Q$$
gleich sind.

Übungsaufgabe 1.17. Es seien P, Q, R Aussagen. Rechne die Wahrheitstabelle der folgenden Aussagen aus:

- $\neg(P \vee Q)$
- $\neg((P \wedge Q) \vee R)$
- $(P \vee Q) \wedge Q$
- $(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P$

Elementare Rechenregel für Mengenoperationen lassen sich somit anhand der logischen Prinzipien leicht beweisen (bedenke insbesondere, dass *jede* Aussage von den Elementen der leeren Menge erfüllt wird, da sie keine Elemente enthält, die die Aussage verletzen könnte).

Somit haben M und N, falls sie gleich sind, die selben Eigenschaften.

Satz 1.18. *Es seien M, N, P Mengen. Dann gelten die Mengengleichungen*

(1) $M \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $M \cup \emptyset = M$,
(3) $M \setminus \emptyset = M$,
(4) $M \cup N = N \cup M$,
(5) $M \cap N = N \cap M$,
(6) $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$,
(7) $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$,
(8) $(M \cap N) \cup P = (M \cup P) \cap (N \cup P)$,
(9) $(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$,

Beweis. (1) $M \cap \emptyset$ ist nach Definition die Menge der Elementen, die M *und* $\emptyset$ gehören. Da $\emptyset$ keine Elemente hat, hat $M \cap \emptyset$ ebenfalls keine Elemente.
(4) Es sei $x \in M \cup N$: nach Definition gehört x der Menge M oder der Menge N, und somit ist x auch Element von $N \cup M$.
(8) Ist $x \in (M \cap N) \cup P$, so ist x Element von P oder von $M \cap N$, d.h. von M *und* N. Ist $x \in P$, so ist x nach Anmerkung 1.10 auch Element von $M \cup P$ sowie von $N \cup P$, und somit von $(M \cup P) \cap (N \cup P)$. Ist jedoch $x \in M \cap N$, so ist $x \in M \subset M \cup P$ und auch $x \in N \subset N \cup P$. Damit hat man die Inklusion $(M \cap N) \cup P \subset (M \cup P) \cap (N \cup P)$ bewiesen. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, sei $x \in (M \cup P) \cap (N \cup P)$. Dann ist x Element sowohl von $M \cup P$ als auch von $N \cup P$. Also ist x Element von M oder P und auch von N oder P. Ist x Element von P, so ist auch $x \in (M \cap N) \cup P$; ist jedoch $x \notin P$ so muss x Element von M (damit $x \in M \cup P$) und auch von N (damit $x \in N \cup P$) ist. Also ist $x \in M \cap N \subset (M \cap N) \cup P$. □

Satz 1.19. *Sind M, N beide Teilmengen der Menge P sind, so*

- *es gilt genau dann $M \subset N$, wenn $N^C \subset M^C$,*
- $M \setminus N = M \cap N^C$,
- $(M \cup N)^C = M^C \cap N^C$,
- $(M \cap N)^C = M^C \cup N^C$.

Die letzten beiden Gleichungen heißen ***De Morgansche Gesetze****.*

Übungsaufgabe 1.20. Vollende den Beweis vom Satz 1.18.

Übungsaufgabe 1.21. Führe den Beweis vom Satz 1.19 durch.

Ein Beispiel einer Menge ist $\mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen. In der modernen Mathematik wurde sie 1889 von Giuseppe Peano *axiomatisch* eingeführt.

Axiom 1.22. *Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$, so dass die folgende Axiome gelten:*

- *(P1)* $0 \in \mathbb{N}$,
- *(P2) für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $s(n) \in \mathbb{N}$ so dass*

- *(P3) $s(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und*
- *(P4) $n = m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ so dass $s(n) = s(m)$, und schließlich:*
- *(P5) Ist X eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ und gilt es*
  - *$0 \in X$ und*
  - *$s(n) \in X$ für alle $n \in X$,*

  so ist $X = \mathbb{N}$.

Ihre Elemente heißen ***natürliche Zahlen****.*

Beachte, dass P3 die Möglichkeit ausschließt, dass die Zuordnung $n \mapsto s(n)$ trivial ist, also $s(n) = n$ für alle n. Vielmehr bezeichnet man $s(n)$ durch $n+1$ und somit wird auch die Addition auf $\mathbb{N}$ definiert: s. [1, § I.5] für Details.

Definition 1.23. *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann wird die* ***Summe*** *von m und n durch*

$$n + m := \underbrace{s(s(\dots(n)))}_{m \text{ Mal}},$$

das ***Produkt*** *von m und n durch*

$$n \cdot m := \underbrace{n + \dots + n}_{m \text{ Mal}}$$

und die m-te ***Potenz*** *von n durch*

$$n^m := \underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_{m \text{ Mal}}$$

definiert. (Meistens wird $n \cdot m$ einfach mit nm bezeichnet).

Anmerkung 1.24. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ definitionsgemäß

$$n = \underbrace{s(s(\dots(0)))}_{n \text{ Mal}}$$

erfüllt, sind die Addition und die Multiplikation kommutative Operationen, d.h., $m + n = n + m$ und $nm = mn$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Überhaupt spiegeln die Peanoschen Axiome die intuitive Vorstellung wieder, die Menschen von natürliche Zahlen haben. Sie beruhen nur auf dem intuitivem Begriff von „Nachfolger“ und werden in der Mathematik wie auch alle andere Axiome als unbewiesene Wahrheiten angenommen und benutzt.

Anmerkung 1.25. Insbesondere besagen die Axiome von Peano, dass $\mathbb{N}$ nicht leer ist (da $0 \in \mathbb{N}$, $P1$); dass es eine Funktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, die injektiv ist, und für die 0 nicht im Bild liegt ($P2, P3, P4$) (Funktionen werden formal im nächsten Kapitel eingeführt).

Besonders wichtig ist $P5$, das **Induktionsprinzip**, welches viele Beweise ermöglicht dank dem folgenden Satz.

Satz 1.26 (Induktionsprinzip). *Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ eine Aussage über die Zahl n. Gelte $A(1)$ („Induktionsanfang“) und darüberhinaus folge aus der Gültigkeit von $A(n)$ dass auch $A(n+1)$ gilt („Induktionsschritt“), für $n \in \mathbb{N}$ beliebig. So gilt $A(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ gilt}\}$. Dann ist nach Voraussetzung $0 \in M$ und zusätzlich aus $n \in M$ folgt $n + 0 \in M$. Somit ist nach dem 5. Peanoschen Axiom $M = \mathbb{N}$, d.h., $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel 1.27. Der junge Carl–Friedrich Gauß zeigte mittels Induktionsprinzip, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Dies kann man dank dem Induktionsprinzip nachvollziehen: für $n = 1$ gilt die Aussage offensichtlich $(1 = \frac{1}{2}1(1+1))$. Es sei nun $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, so ist

$$1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \left(\frac{1}{2}n + 1\right)(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Vorsicht! Zum Beweis durch Induktion sind tatsächlich beide Voraussetzungen nötig. Denn z.B. ist die Aussage

$$„1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 7 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}“$$

falsch, obwohl man die Aussage

$$\tilde{A}(n) := „1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 7“, \qquad n \in \mathbb{N},$$

definieren kann, für die der Induktionschritt $\tilde{A}(n) \Rightarrow \tilde{A}(n+1)$ gilt. Das liegt daran, dass der Induktionsanfang $\tilde{A}(1)$ falsch ist. □

Etwas salopp definiert man als **geordnetes Paar** eine Sammlung (x, y) zweier nicht notwendig voneinander verschiedener Objekte x, y, wobei eines der beiden ausgezeichnet ist. Das ausgezeichnete Objekt x wird oft **vordere** (oder **erste**) **Komponente**, das andere y **hintere** (oder **zweite**) **Komponente** des geordneten Paars genannt. Z.B. bilden $(7, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1)$ geordnete Paare (die alle unterschiedlich sind).

Allgemeiner führt man die Folgende ein.

Definition 1.28. *Ein n-**Tupel** ist eine Sammlung von n nicht notwendig voneinander verschiedener Objekte, wobei die Reihenfolge der Angaben berücksichtigt werden soll, etwa $(x_1, \ldots, x_n)$, wobei x_i der i-te **Eintrag** (oder die i-te **Koordinate**) des Tupels heißt.*

Übungsaufgabe 1.29. Es sei M eine Menge und $a, b \in M$. Zeige, dass die genauere Definition eines geordneten Paars durch

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

genau diese Vorstellung wiederspiegelt. Wie kann man formal n-Tupel einführen?

Definition 1.30. *Es sei M eine Menge. Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen N von M heißt **Potenzmenge** von M.*

Der Name „Potenzmenge“ folgt aus der Tatsache, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ 2^n Elemente hat, falls M n Elemente hat, s. Übungsaufgabe cardinality 1.69.

Anmerkung 1.31. Das mindestens eine Menge M überhaupt existiert, ist ein Axiom. Aber sobald man eine Menge hat, kann man daraus unendlich viele neue Mengen basteln:

$$\mathcal{P}(M),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))), \ldots$$

Beispiel 1.32. Es sei M die Menge der Buchstaben a, b, also $M = \{\text{a,b}\}$. Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, d.h. $|M| = 2$ und $|\mathcal{P}(M)| = 2^2$. □

alphab Beispiel 1.33. Es sei A das Alphabet, also

$$A = \{\text{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z,ä,ö,ü,ß}\}.$$

Beachte, dass $\{\text{h,u,n,d}\}, \{\text{k,a,t,z,e}\} \in \mathcal{P}(A)$, und $\{\text{h,u,n,d}\} \neq \{\text{k,a,t,z,e}\}$. Doch bildet $\mathcal{P}(A)$ *nicht* das Wörterbuch: einerseits folgt aus der Definition von Menge, dass $\{\text{h,u,n,d}\} = \{\text{n,u,d,h}\}$, und allgemeiner stimmt jedes „Wort“ (d.h. jede Teilmenge von A) mit seinen Anagrammen überein; andererseits gehören nicht alle üblichen Worte zu $\mathcal{P}(A)$, denn z.B. bildet $\{\text{u,n,i,v,e,r,s,i,t,ä,t}\}$ (und i.A. jedes Wort, in dem mindestens eine Buchstabe mehrmals vorkommt) keine Menge, vgl. Beispiel paarwunter 1.2. □

wort Beispiel 1.34. Betrachte die Menge A aus dem Beispiel alphab 1.33. Wir haben gesehen, dass die Teilmengen {h,u,n,d} und {n,u,h,d} übereinstimmen. Die Tupel (h,u,n,d), (n,u,h,d) $\in A^4$ sind aber unterschiedlich. Auch bemerkenswert ist, dass (u,n,i,v,e,r,s,i,t,ä,t) $\in A^{11}$ als Tupel wohldefiniert ist. □

Sind M, N Mengen, so kann man die Menge aller geordneten Paare (x, y) definieren, so dass $x \in M$ und $y \in N$. Eine Solche Menge heißt **kartesische Produkt** von M und N und wird durch $M \times N$ bezeichnet. Wohlgemerkt: $M \times N = N \times M$ genau dann, wenn $M = N$.

Beispiel 1.35. Sind $M = \{1, 2\}$ und $N = \{$Ingenieurwissenschaften und Informatik, Naturwissenschaften, Medizin, Mathematik und Wirtschaftswissenschaften$\}$ die Menge der Fakultäten der Universität Ulm, so sind z.B.

$$(\text{Naturwissenschaften}, 2) \in N \times M \qquad \text{und} \qquad (2, \text{Medizin}) \in M \times N.$$

□

Allgemeiner führt man die folgende Definition ein.

Definition 1.36. *Das* ***kartesische Produkt*** $M_1 \times \ldots \times M_n$ *(oder* $\prod_{i=1}^n M_i$*) der Mengen* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *ist die Menge aller* n*-Tupel* $(x_1, \ldots, x_n)$*, so dass der* i*-te Eintrag* x_i *Element von* M_i *ist. Sind* $M_1 = \ldots = M_n$*, so bezeichnet man oft ihr kartesische Produkt durch*

$$M^n.$$

Die Mengen $M_1, \ldots, M_n$ *heißen* ***Faktoren****. Ist einer der Faktoren die leere Menge, so ist nach Definition auch* $M_1 \times \ldots \times M_n = \emptyset$*.*

Definition 1.37. *Es seien* M *eine Menge. Jede Teilmenge* $R \subset M \times M$ *heißt* ***Relation*** *auf* M*, und man schreibt* xRy*, falls* $(x, y) \in R$*.*

Eine Relation heißt ***reflexiv****, bzw.* ***symmetrisch****, bzw.* ***antisymmetrisch****, bzw.* ***transitiv****, bzw.* ***total****, falls für alle* $x, y, z \in M$

- xRx*, bzw.*
- xRy *genau dann, wenn* yRx*, bzw.*
- $x = y$*, falls* xRy *und* yRx*, bzw.*
- xRz*, falls* xRy *und* yRz*, bzw.*
- xRy *oder* yRx*.*

subsetrel Beispiel 1.38. Es sei M eine Menge und man betrachte auf $\mathcal{P}(M)$ die Relation R definiert für $N_1, N_2 \in \mathcal{P}(M)$ durch

$$N_1 R N_2 \qquad \text{falls} \qquad N_1 \subset N_2.$$

So ist R offensichtlich reflexiv, antisymmetrisch (laut Anmerkung subeq 1.6, transitiv (warum?), *nicht* symmetrisch ($\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge, aber nicht umgekehrt), *nicht* total (z.B. gilt für $M := \{1, 2\}$ weder $\{1\} \subset \{2\}$ noch $\{2\} \subset \{1\}$). □

Beispiel 1.39. Es seien V eine Menge und E eine Relation auf V. Dann heißt das geordnete Paar (V, E) ein **(gerichteter) Graph**. Die Elemente von V heißen üblicherweise **Knoten**, die Elemente von E heißen **Kanten**. Der Begriff von Graph ist sehr wichtig in der Mathematik sowie in der Informatik und wird in der *Graphentheorie* untersucht. □

Definition 1.40. *Es sei* M *eine Menge. Eine Relation* R *heißt* ***Äquivalenzrelation****, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Dann heißt die Menge* $[x] := \{y \in M : xRy\}$ ***Äquivalenzklasse*** *von* x*. Jedes Element der Äquivalenz-klasse* $[x]$ *heißt* ***Repräsentant*** *oder* ***Vertreter*** *von* $[x]$*; zwei Elemente einer Äquivalenzklasse heißen* ***äquivalent****. Die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl.* R *heißt* ***Quotientenmenge*** *bzgl.* R *und wird mit*

$$M/R$$

bezeichnet.

Beispiel 1.41. Es sei M eine Menge und betrachte auf $\mathcal{P}(M)$ die Relation R definiert für $N_1, N_2 \in \mathcal{P}(M)$ durch

$$N_1 R N_2 \qquad \text{falls} \qquad N_1 = N_2.$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation (warum?). □

Die Definition formalisiert die Idee, dass zwei unterschiedliche Elemente einer Menge für bestimmte Zwecke als gleichwertig angesehen werden können.

Satz 1.42. *Es sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Dann ist jedes Element von M ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Die Äquivalenzklassen zu zwei Elementen $x, y \in M$ sind entweder gleich oder disjunkt, jenachdem, ob x, y äquivalent sind oder nicht.*

Beweis. Es sei $x \in M$. Wegen der Reflexivität gilt xRx für alle $x \in M$, d.h., $x \in [x]$ – also gibt es *mindestens* eine Äquivalenzklasse, die x enthält.

Sei nun x Element zweier Äquivalenzklassen $[y], [z]$. Dann ist xRy sowie auch xRz und, aufgrund der Symmetrie von R, auch zRx. Somit gilt

$$zRx \quad \text{und} \quad xRy,$$

und daher wegen der Transitivität

$$zRy.$$

Somit ist $z \in [y]$ und wieder durch Verwendung der Transitivität und der Symmetrie sieht man, dass jedes Element aus $[z]$ ebenfalls in $[y]$ enthalten ist, d.h. $[z] \subset [y]$. Ähnlich sieht auch (da yRz aufgrund der Symmetrie von R) dass $[y] \subset [z]$, und deshalb $[z] = [y]$. Wir haben somit bewiesen, dass x Element *höchstens* einer Äquivalenzklasse ist. □

Beispiel 1.43. Es sei M eine Menge und $R_1 := \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$. Dann ist R_1 eine Äquivalenzrelation, und es gilt genau dann xR_1y, wenn $x = y$, also gilt $[x] = \{x\}$. Darüber hinaus ist $R_2 := M \times M$ auch Äquivalenzrelation: es gibt offensichtlich genau eine Äquivalenzklasse ($M \times M$ selber) bzgl. R_2. Wir merken auch an, dass die leere Menge keine Relation ist, denn $(x, x) \in \emptyset$ für kein x. □

Beispiel 1.44. Es sei M die Menge der Dreiecke, und definiere xRy, wenn x ähnlich zu y ist, d.h. wenn sie dieselben Innenwinkel haben. Dann definiert R eine Äquivalenzrelation. □

Beispiel 1.45. Es sei $p \in \mathbb{N}$. Definiere eine Relation R_p auf $\mathbb{Z}$ dadurch, dass xRy genau denn, wenn $x - y$ ein Vielfach von p ist. Dann ist R eine Äquivalenzrelation und man schreibt

$$x = y \pmod{p}.$$

Den Quotientenraum

$$\mathbb{Z}/R_p$$

bezeichnet man mit $\mathbb{Z}_p$.. Also ist z.B. für $p = 2$

$$\mathbb{Z}_2 := \{[0], [1]\}.$$

dabei ist $[0]$ die Menge aller geraden und $[1]$ die Menge aller ungeraden Zahlen. □

Definition 1.46. *Es sei M eine Menge. Eine Relation $\leq$ („kleiner/gleich“) auf M heißt*

- *eine **Quasiordnung**, falls sie transitiv und reflexiv ist;*
- *eine **Halbordnung**, falls sie transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist;*
- *eine **Totalordnung**, falls sie eine totale Halbordnung ist;*
- *eine **Wohlordnung**, falls für jede nichtleere Teilmenge von M ein Element $x_0 \in M$ existiert, für das $x_0 \leq x$ für alle $x \in M$.*

*Die Menge M heißt **quasi-**, **halb-**, **total-** bzw. **wohlgeordnet**, falls es eine Quasi-, Halb-, Total- bzw. Wohlordnung $\leq$ auf M gibt, und man schreibt oft $(M, \leq)$.*

Für $x, y \in M$ schreibt man

$$x \geq y,$$

falls $y \geq x$. Weiter schreibt man

$$x < y \qquad \text{bzw.} \qquad x > y,$$

falls

$$x \leq y \text{ und } x \neq y, \qquad \text{bzw.} x \geq y \text{ und } x \neq y.$$

Anmerkung 1.47. Ist M durch $\leq$ totalgeordnet und sind $x, y \in M$, so kann genau ein der folgenden gelten:

- $x < y$,
- $x = y$,
- $x > y$.

Beispiel 1.48. Betrachte $M := \{\text{Stein}, \text{Papier}, \text{Schere}\}$. Definiere für $x, y \in M$ $x \leq y$ dadurch, dass y gegen x *nicht* verliert. Bekanntlich gilt

$$\text{Stein} \leq \text{Stein} \qquad \text{Papier} \leq \text{Papier} \qquad \text{Schere} \leq \text{Schere},$$

sowie

$$\text{Stein} \leq \text{Papier} \qquad \text{Papier} \leq \text{Schere} \qquad \text{Schere} \leq \text{Stein}.$$

Somit ist $\leq$ auf M wohl eine reflexive, antisymmetrische und totale, aber keine transitive Relation.

`begrordn`

Definition 1.49. *Es sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und N eine Teilmenge von M. Dann heißt ein Element $x \in M$*

- ***obere Schranke** von N, falls*

$$y \leq x \qquad \text{for all } y \in N.$$

- ***maximales Element** von N, wenn*

$$x \in N \quad \text{und} \quad (x \leq y \Rightarrow x = y) \text{ for all } y \in N.$$

- ***Maximum** von N, wenn $x \in N$ und x eine obere Schranke ist, d.h., wenn*

$$x \in N \quad \text{und} \quad y \leq x \text{ for all } y \in N.$$

Entsprechend heißt x

- ***untere Schranke** von N, falls*

$$y \geq x \qquad \text{for all } y \in N.$$

- ***minimales Element** von N, wenn*

$$x \in N \quad \text{und} \quad (x \geq y \Rightarrow x = y) \text{ for all } y \in N.$$

- ***Minimum** von N, wenn $x \in N$ und x eine untere Schranke ist, d.h., wenn*

$$x \in N \quad \text{und} \quad y \geq x \text{ for all } y \in N.$$

Lemma 1.50. *Es sei $(M, \leq)$ eine totalgeordnete Menge und N eine Teilmenge von M. Dann ist $x \in M$ genau dann ein maximales Element von N, wenn x ein Maximum von N ist.*

Beweis. Es sei $x \in N$ ein maximales Element. Dann ist für alle $y \in M$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ (da $\leq$ total ist). Im ersten Fall gilt nach Voraussetzung $x = y$. Es gilt also $y \leq x$ für alle $y \in M$, und somit ist x ein Maximum.

Es sei nun x ein Maximum, für das $x \leq y$ gilt. Nach Definition von Maximum ist auch $y \leq x$, und somit (aufgrund der Antisymmetrie von $\leq$) $x = y$. □

Die Peanoschen Axiome – und insbesondere s – erlauben, eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$ zu definieren: Man setzt

$$n \leq s(n)$$

und erweitert diese Relation durch Transitivität, d.h., gilt

$$n \leq s(s(n))$$

usw.

Anders gesagt:

DEFINITION 1.51. *Man schreibt $n \leq m$ und sagt, dass n **kleiner oder gleich** als m ist, falls es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, für das*

$$n + p = m.$$

ÜBUNGSAUFGABE 1.52. Zeige, dass die Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ mit Addition und Multiplikation verträglich ist, d.h., für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt

- $m \leq n$ genau dann, wenn $m + p \leq n + p$;
- ist $p > 0$, so gilt $m \leq n$ genau dann, wenn $pm \leq pn$.

wohlordnN

ÜBUNGSAUFGABE 1.53. Zeige, dass $\leq$ sogar eine Wohlordnung von $\mathbb{N}$ ist. Dazu setze die Existenz einer nichtleeren Menge A, die kein Minimum hat, voraus und betrachte die Menge B der natürlichen Zahlen, die untere Schranken von A sind. Zeige nach Induktion, dass $B = \mathbb{N}$ und folgere, dass $A = \emptyset$ – Widerspruch!

kleinglind

SATZ 1.54. *Für alle natürliche Zahlen $m \geq 4$ gilt*

$$2^m \geq m^2.$$

BEWEIS. (1) Wir zeigen erst, dass

$$m^2 - 2m - 1 \geq 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 4.$$

Betrachte erst die Menge

$$Y := \{m = n + 4 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N},\ m^2 - 2m - 1 \geq 0\}.$$

Die Aussage gilt für alle $n \geq 4$ falls wir zeigen, dass $Y = \mathbb{N}$. Den Beweis führen wir nach dem Induktionsprinzip. Für $n = 0$, und somit für $m = 4$, hat man

$$4^2 - 2 \cdot 4 - 1 = 16 - 8 - 1 = 7 \geq 0.$$

Gilt nun die Aussage für m, so gilt sie auch für $m+1$, denn $(m+1)^2 - 2(m+1) - 1 = m^2 + 2m + 1 - 2m - 2 - 1 = m^2 + 1 \geq 0$.

(2) Betrachte nun die Menge

$$X := \{m = n + 4 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N},\ 2^m \geq m^2\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $X = \mathbb{N}$. Für $n = 0$, also $m = 4$, gilt tatsächlich

$$2^4 = 4^2.$$

Gilt nun für ein $m \geq 2$

$$2^m \geq m^2,$$

so soll man überprüfen, dass

$$2^{m+1} \geq (m+1)^2$$

gilt. In der Tat:

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m \geq 2m^2 \geq m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

da

$$m^2 - 2m - 1 \geq 0, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

dank (1). $\square$

Beispiel 1.55. (1) Definiert man eine Relation $\leq_{\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(x_1, x_2) \leq_{\mathbb{N}^2} (y_1, y_2) \text{ falls } x_1^2 + x_2^2 \leq y_1^2 + y_2^2,$$

(wobei $\leq$ die Totalordnung auf $\mathbb{N}$ wie in (1) bezeichnet), so ist $\leq_{\mathbb{N}^2}$ offensichtlich eine Quasiordnung, doch keine Halbordnung, denn z.B. $(1,0)_{\mathbb{N}^2}(0,1)$ und $(0,1)_{\mathbb{N}^2}(1,0)$ ohne, dass $(1,0) = (0,1)$.

(2) Die Relation, die im Beispiel subsetrel 1.38 eingeführt wurde, ist eine Halbordnung aber keine Totalordnung.

□

Übungsaufgabe 1.56. Es seien A, B halbgeordnete Mengen. Definiere eine Relation $\leq$ auf $A \times B$ durch

$$(a, b) \leq (a', b') \qquad :\Leftrightarrow \qquad a < a' \text{ oder } (a = a' \text{ und } b \leq b').$$

(1) Zeige, dass diese eine Relation eine Halbordnung ist – welche **lexikographische Ordnung** genannt wird.
(2) Betrachte den Fall von $A = B = \mathbb{R}$. Hat $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ bzgl. der lexikographischen Ordnung eine obere Schranke? hat sie eine untere Schranke?

Obwohl wir auf eine Einführung der Zermelo–Fraenkel-Mengenlehre verzichtet haben, sollten an dieser Stelle das folgende Axiom und seine wichtigste Folgerung nicht unerwähnt bleiben.

Axiom 1.57 (Auswahlaxiom). *Ist A eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element von A enthält.*

Eine **Kette** wird definiert als eine totalgeordnete Teilmenge einer halbgeordneten Menge.

Lemma 1.58 (Zorn 1935). *Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.*

1.1. Ergänzungen zu Kombinatorik

Beispiel 1.59. Insbesondere lassen sich die Gleichungen aus Satz mengenoper 1.18 auf den Fall von endlich vielen Mengen $M_1, \ldots, M_n$ (statt nur M, N) verallgemeinern. □

Übungsaufgabe 1.60. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{gilt.}$$

bernoulli Übungsaufgabe 1.61. Es sei $p > -1$. Zeige, dass $(1 + p)^n \geq (1 + np)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Diese ist die sogenannte *Bernoullische Ungleichung*).

Übungsaufgabe 1.62. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und alle reelle Zahlen $x \in (0, 1)$ die Ungleichung

$$(1 - x)^n < \frac{1}{1 + nx}$$

gilt.

Übungsaufgabe 1.63. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage sodass
(1) $A(n_0)$ richtig für $n_0 \in \mathbb{N}$ ist, und
(2) für $m \geq n_0$ gilt: ist $A(m)$ richtig, so ist auch $A(m + 1)$ richtig.

Zeige mit Hilfe des Peanoschen Axioms, dass dann $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Definition 1.64. *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*

(1) Die Zahl $n!$ (Aussprache: „n Fakultät") bezeichnet

$$0! := 1, \qquad n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \qquad n \geq 1.$$

(2) Der ***Binomialkoeffizient*** $\binom{n}{k}$ *bezeichnet*

$$\binom{n}{0} := 1, \qquad \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Definition 1.65. *Eine* ***Anordnung*** *einer Menge A mit n Elementen ist ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$, so dass $x_i \neq x_j$ für je zwei Indizes i, j mit $i \neq j$.*

anordnung Satz 1.66. *Die Anzahl der Anordnungen einer Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist $n!$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über n. Die Aussage ist offensichtlich gültig für $n = 1$. Es sei nun $n!$ die Anzahl der Anordnungen von $\{x_1, \ldots, x_n\}$: betrachte alle Anordnungen von $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, so dass x_i als erste Koordinate der Anordnung auftritt: für ein festes i gibt es nach Induktionsannahme $n!$ davon. Wiederholen wir die Argumentation für $i = 1, 2, \ldots, n+1$, so hat man insgesamt $n!(n+1) = (n+1)!$ Anordnungen, und somit ist der Induktionsschritt bewiesen. □

tmenge Satz 1.67. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist $\binom{n}{k}$.*

Beweis. Die Aussage gilt für $k = 0$, denn die leere Menge ist nach Definition die einzige Teilmenge ohne Elemente.

Nach Satz 1.66 betrachtet man für $k \neq 0$ alle $n!$ möglichen Anordnungen der Menge und sucht sich alle Möglichkeiten, die ersten k Koordinaten mit paarweise unterschiedlichen Elementen zu besetzen. Es gibt nun $k!$ Anordnungen dieser Elementen in den ersten k Koordinaten, und $(n-k)!$ Anordnungen der übrigen Elementen in den letzten $n-k$ Koordinaten. Da Anordnungen keine Rolle bei der Definition einer Menge spielen, muss man also $n!$ durch $k!$ und $(n-k)!$ teilen, was die Aussage unmittelbar liefert. □

Übungsaufgabe 1.68. Wieviele Teilmengen hat insgesamt eine n-elementige Menge?

cardinality Übungsaufgabe 1.69. Es sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen, etwa n. Zeige durch vollständige Induktion, dass die Potenzmenge von M genau 2^n Elemente hat.

Satz 1.70. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Zahl x gilt*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Beweis. Es gilt

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot \ldots \cdot (1+x).$$

So besteht $(1+x)^n$ aus der Summe aller Produkte, die genau einen Summand aus jedem der n Termen $(1+x)$ enthalten. Es gibt nun laut Satz 1.67 genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus diesen n Termen den Summand x k-Mal auszuwählen (und somit den Summand 1 $(n-k)$-Mal). Durch Ausmultiplizieren folgt die Aussage. □

Übungsaufgabe 1.71. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k+1$ die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

gilt, und interpretiere das sogenannte *Pascalsche Dreieck*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&1&&&& \\
&&&1&&2&&1&&& \\
&&1&&3&&3&&1&& \\
&1&&4&&6&&4&&1& \\
1&&5&&10&&10&&5&&1,
\end{array}$$

nach Blaise Pascal genannt.

2nn2 ÜBUNGSAUFGABE 1.72. Zeige, dass $2^n < n!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 4$.

KAPITEL 2

Funktionen

Intuitiv ist eine Funktion ein mathematisches Objekt, welches Paare von Elementen aus zwei verschiedenen Mengen verbindet. Doch ist es oft wichtig, über eine formellere Definition zu verfügen.

Definition 2.1. *Es seien E, F Mengen und G eine Teilmenge von $E \times F$, so dass für jedes $x \in E$ genau ein $y \in F$ gibt, mit $(x, y) \in G$. Dann heißt $f := (E, F, G)$ eine* ***Funktion*** *oder* ***Abbildung****. Dabei heißen E und F* ***Definitionsmenge*** *bzw.* ***Zielmenge*** *von f, und G ist der* ***Graph*** *von f.*

Wir werden uns in dieser Vorlesung meistens mit dem Fall beschäftigen, dass E, F Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. In diesem Fall spricht man von einer **reellen Funktion**.

Die Bezeichnung $f : E \to F$ heißt, dass E und F Definitions- bzw. Zielmenge einer gegebener Funktion f sind. Es sei $(x, y) \in G$, so schreibt man $f(x) = y$. Das allgemeine Gesetz, das ein beliebiges $x \in E$ nach $f(x) \in F$ abbildet, bezeichnet man oft durch

$$f : E \ni x \mapsto f(x) \in F,$$

oder

$$f : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

oder einfacher

$$f : x \mapsto f(x).$$

Definition 2.2. *Es sei $f := (E, F, G)$ eine Funktion. Dann heißt f*

- ***injektiv****, falls $x = y$ aus der Bedingung $f(x) = f(y)$ folgt, für alle $x, y \in E$;*
- ***surjektiv****, falls für alle $y \in F$ ein $x \in E$ existiert, so dass $f(x) = y$;*
- ***bijektiv****, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Beispiel 2.3. Betrachte die Menge E der Bundesländer und die Menge F der Landeshauptstädte. Dann ist die Funktion, welche jedem Bundesland seine Landeshaupstadt zuordnet, bijektiv. □

Definition 2.4. *Die Menge $\tilde{F} := \{y \in F : y = f(x)$ für mindestens ein $x \in E\}$ heißt* ***Bildmenge*** *von f. Ist $U \subset E$, so heißt $f(U) := \{y \in F : y = f(x)$ für mindestens ein $x \in U\}$* ***Bild von** U **unter** f. Besteht U aus nur einem Element, etwa $U = \{x\}$, so heißt einfach $y = f(x)$* ***Bild von** x **unter** f. Ist $V \subset F$, so heißt $f^{-1}(V) := \{x \in E : f(x) \in V\}$* ***Urbild*** *von V unter f.*

Anmerkung 2.5. Eine Funktion ist also genau dann surjektiv, wenn Ihre Zielmenge mit der Bildmenge übereinstimmt. Anders gesagt: gegeben sei eine Funktion $f = (E, F, G)$, so kann man eine neue *surjektive* Funktion dadurch definieren, dass man F durch $\tilde{F} := f(E)$ ersetzt. Auch kann man eine *injektive* Funktion dadurch definieren, dass man die Definitionsmenge durch eine kleinere Menge $\tilde{E}$ ersetzt: die neue dadurch definierte Funktion heißt **Einschränkung von f auf $\tilde{E}$** und wird meistens durch $f_{|E}$ bezeichnet.

Beispiel 2.6. Es sei M eine Menge. Dann kann man stets die **identische Funktion** oder **Identität** definieren: diese ist die Funktion, die jeden $x \in M$ nach x selbst abbildet, kurz:

$$id : x \mapsto x.$$

Offensichtlich ist die Identität immer bijektiv. $\square$

konst

Beispiel 2.7. Ist $x_0 \in M$, so kann man die **konstante Funktion** $M \to M$ **mit Wert** x_0 durch $x \mapsto x_0$ definieren. Die konstante Funktion ist nicht injektiv, so bald M ein weiteres Element enthält. $\square$

Übungsaufgabe 2.8. Wie könnte man die Funktion f aus dem Beispiel 2.7 so einschränken, dass die Einschränkung injektiv ist? Was für eine Funktion würde man dadurch tatsächlich definieren?

ice

Beispiel 2.9. Es sei E die Menge der ICE-Zügen, die in Ulm einmal halten, F die Menge der Ulmer Bahnhöfe. Bildet f jeden ICE auf den Ulmer Bahnhof ab, wo er hält, so ist die Funktion nicht surjektiv, denn ICEs halten in Ulm nur am Hauptbahnhof. Betrachtet man aber die Funktion $\tilde{f} := (E, \tilde{F}, G)$, wobei $\tilde{F} = \{\text{Hauptbahnhof}\} \subset F$ ist, so ist $\tilde{f}$ surjektiv. $\square$

Beispiel 2.10. Betrachte die Mengen M der Studierende der Universität Ulm und N der beiden Geschlechter. So kann man die Funktion f betrachten, welche jedem Studierendem sein Geschlecht zuordnet. Eine solche Funktion $f : M \to N$ ist nicht injektiv (so lang an der Universität Ulm mindestens drei Menschen immatrikuliert sind) aber surjektiv (so lang mindestens ein Mann und eine Frau immatrikuliert sind). $\square$

Anmerkung 2.11. Manchmal möchte man vor allem die Bildmenge einer Funktion betonen. In diesem Fall nutzt man eher die Notation

$$\{f(x) : x \in E\} \qquad \text{oder} \qquad (f_x)_{x \in E}$$

und spricht man von **Familie** mit **Indexmenge** E: Es sei z.B.

$$M_n := \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\},$$

so definiert $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \ni n \mapsto M_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, oder

$$\{M_n : 1 \leq n \leq 10\},$$

eine Familie (von Teilmengen von $\mathbb{N}$). Ist insbesondere $E = \mathbb{N}$, so spricht man in der Regel von einer *Folge* (von Elemente aus F). Z.B. definiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit

$$x_n := n^2,$$

eine Folge natürlicher Zahlen. Wir werden Folgen im Kapitel 4 näher betrachten.

Beispiel 2.12. Es seien $M_1, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen und betrachte ihr Kartesisches Produkt. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ ist die k-te **Projektion** durch

$$\prod_{j=1}^{n} M_j \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j \in M_j$$

definiert. Diese Funktion ist surjektiv, aber in der Regel nicht injektiv (es sein denn, M_i besteht aus nur einem Element für alle $i \neq j$). $\square$

Beispiel 2.13. Es sei M eine Menge und N eine Teilmenge von N. Die Funktion

$$j : N \ni x \mapsto x \in M$$

heißt **kanonische Injektion** und ist, nun ja, injektiv. $\square$

Beispiel 2.14. Es sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Betrachte die Quotientenmenge M/R. Die Funktion

$$\pi : M \ni x \mapsto [x] \in M,$$

wobei $[x]$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. R, heißt **kanonische Surjektion** und ist surjektiv (warum?). $\square$

Definition 2.15. *Es sei f eine Funktion mit Definitions- und Zielmenge E bzw. F. Es sei h eine weitere Funktion mit Definitions- und Zielmenge H bzw. J. Es gelte $f(E) \subset H$. So ist die* ***Verkettung*** *$h \circ f$ von h und f als die Funktion mit Definitions- und Zielmenge E bzw. J, die durch*

$$(h \circ f) : x \mapsto h(f(x)), \qquad x \in E,$$

definiert ist.

Anmerkung 2.16. Die Bedingung $f(E) \subset H$ ist nötig, damit man die verkettete Funktion überhaupt definieren kann.

assozverket Anmerkung 2.17. Es folgt aus der Definition, dass die Funktionsverkettung assoziativ ist, d.h.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

so bald beide Seiten wohl definiert sind (d.h., so bald die Bildmengen ordentlich in den Definitionsmengen enthalten sind).

Definition 2.18. *Es sei f eine Funktion mit Definitions- und Zielmenge E bzw. F.*

- *Existiert eine Funktion h mit Definitions- und Zielmenge F bzw. E so, dass $f \circ h : F \to F$ gleich der identischen Funktion auf F ist, also*

  $$f(h(y)) = y \qquad \text{für alle } y \in F,$$

  so heißt h die ***rechte Inverse*** *oder* ***rechte Umkehrfunktion*** *von f auf E, und f heißt* ***auf*** *E* ***rechts invertierbar****.*
- *Existiert eine Funktion g mit Definitions- und Zielmenge F bzw. E so, dass $g \circ f : E \to E$ gleich der identischen Funktion auf E ist, also*

  $$g(f(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in E,$$

  so heißt g die ***linke Inverse*** *oder* ***linke Umkehrfunktion*** *von f auf E, und f heißt* ***auf*** *E* ***links invertierbar****.*
- *Ist f sowohl links als auch rechts invertierbar, so heißt sie* ***invertierbar****.*

Theorem 2.19. *Ist eine Funktion invertierbar, so stimmen ihre linke Inverse g und ihre rechte Inverse h überein.*

Beweis. Zwei Funktionen mit gleichen Definitions- und Zielmenge stimmen genau dann überein, wenn sie für alle Elemente ihrer (gemeinsamen) Definitionsmenge gleiche Werte annehmen. Man muss also zeigen, dass $g(y) = h(y)$ für alle $y \in F$ gilt. In der Tat gilt

$$g(y) \overset{(*)}{=} g(f(h(y))) \overset{(**)}{=} (g \circ f)(h(y)) \overset{(***)}{=} h(y) \qquad \text{for all } y \in Y,$$

wobei $(*)$ und $(***)$ gelten, da g und h linke bzw. rechte Inverse von f sind, während $(**)$ folgt aus der Anmerkung assozverket 2.17. □

In diesem Fall schreibt man

$$f^{-1} := g = h.$$

Theorem 2.20. *Es seien E, F zwei Mengen. Eine Funktion $f : F \to E$ ist genau dann invertierbar, wenn sie bijektiv ist.*

Beweis. Es sei f invertierbar. Dann ist f injektiv, denn für $x, y \in E$ aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y.$$

Auch ist f surjektiv, denn für $z \in F$ gilt für $x := f^{-1}(z) \in E$ auch

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Umgekehrt, sei f bijektiv und suche eine (und somit *die*) Inverse. Betrachte die Relation

$$R^{-1} := \{(z,x) \in F \times E : (x,z) \in R\}.$$

Man möchte die Funktion $g = (F, E, R^{-1})$ betrachten (das wäre der natürlichste Kandidat für die Inverse von f): dazu muss man aber erst überprüfen, dass die Relation R^{-1} überhaupt eine Funktion definiert, d.h., dass für alle $z \in F$ soll es *genau* ein $x \in E$ geben mit $(z,x) \in R^{-1}$, oder äquivalent mit $(x,z) \in R$, oder äquivalent mit $f(x) = z$. Genau das besagt aber die bijektivität von f!

Nun zeigt man also, dass $g = f^{-1}$ ist. Es sei $x \in E$ und betrachte $y := f(x)$. Dann gilt genau dann $g(f(x)) = g(y) = x$, wenn

$$(y,x) \in R^{-1}, \qquad \text{oder äquivalent} \qquad (x,y) \in R,$$

was nach der Voraussetzung $y = f(x)$ (und der Definition von R^{-1}) tatsächlich gilt. Ähnlich sieht man, mit $x = g(y)$, dass genau dann $f(g(y)) = y$ gilt, wenn

$$(x,y) \in R, \qquad \text{oder äquivalent} \qquad (y,x) \in R^{-1},$$

was tatsächlich wieder nach der Voraussetzung $x = f(y)$ gilt. □

Übungsaufgabe 2.21. Es sei f eine sowohl links als auch rechts invertierbare Funktion. Zeige, dass die linke Inverse und die rechte Inverse übereinstimmen.

Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$ bezeichnen wir mit $[a,b]_{\mathbb{N}}$ das **natürliche Intervall** von a bis b, also

$$[a,b]_{\mathbb{N}} := \{n \in \mathbb{N} : a \leq n \text{ und } n \leq b\}.$$

Theorem 2.22. *Es sei M eine Menge und $f : M \to [1,n]_{\mathbb{N}}$, $g : M \to [1,m]_{\mathbb{N}}$ zwei bijektive Funktionen. So gilt $m = n$.*

Die Zahl n heißt **Kardinalität** von M und wird oft mit $|M|$ bezeichnet.

Beweis. Betrachte die Menge

$$\begin{aligned} X \quad := \quad \{n+1 \in \mathbb{N} : \ & \text{falls es eine bijektive Funktion } f : M \to [1,n]_{\mathbb{N}} \text{ gibt,} \\ & \text{so gilt } n = m \text{ für alle andere bijektive Funktionen } g : M \to [1,m]_{\mathbb{N}}\}. \end{aligned}$$

Man merkt zuerst, dass $1 = 0 + 1 \in X$, denn gibt es $f : M \to [1,1]_{\mathbb{N}} = \{1\}$ bijektiv, so muss es dank Bijektivität notwendigerweise genau ein Element in M geben, und dann auch das Bild von M unter g hat genau ein Element, d.h., $m = n = 1$.

Gelte nun

$$\begin{aligned} & \text{falls es eine bijektive Funktion } f : M \to [1,n]_{\mathbb{N}} \text{ gibt,} \\ & \quad \text{so gilt } n = m \text{ für alle bijektive Funktionen } g : M \to [1,m]_{\mathbb{N}} : \end{aligned}$$

wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \text{falls es eine bijektive Funktion } f : M \to [1,n+1]_{\mathbb{N}} \text{ gibt,} \\ & \quad \text{so gilt } n+1 = m+1 \text{ für alle andere bijektive Funktionen } g : M \to [1,m+1]_{\mathbb{N}}\}. \end{aligned}$$

Betrachte also eine bijektive Funktion $f : M \to [1,n+1]_{\mathbb{N}}$. Da die Funktion bijektiv ist, gibt es genau ein Element $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = n+1$. Betrachte auch eine weitere bijektive Funktion $g : M \to [0,m+1]_{\mathbb{N}}$: es gibt auch nur ein Element $x_1 \in M$ mit $g(x_1) = m+1$. Wir wollen jetzt nur zeigen, dass

$$n + 1 = m + 1.$$

Wir würden gerne die Induktionsannahme verwenden, leider sind aber im Bild von f bzw. g zuviele Werte vorhanden. Wir wollen also die Abbildungen einschränken, damit ihr Bild um einen Element kleiner wird – und zwar so, dass die neuen Definitionsmengen immer noch übereinstimmen.

Definiere

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in M \setminus \{x_0, x_1\}, \\ g(x_1), & \text{falls } x = x_0, \\ g(x_0), & \text{falls } x = x_1. \end{cases}$$

Nun kann man sich leicht überzeugen dass $h : M \to [1, m+1]$ ebenfalls bijektiv ist: einerseits ist sie injektiv, denn $h(x)$ und $h(y)$ nicht übereinstimmen können, außer wenn $x = y$ (insbesondere gilt genau dann $h(x) = h(x_1)$ für $x \neq x_0$ und $x \neq x_1$, wenn $g(x) = g(x_0)$ – was nicht sein kann aufgrund der Injektivität von g; und es gilt genau dann $h(x) = h(x_0)$ für $x \neq x_0$ und $x \neq x_1$, wenn $g(x) = g(x_1)$ – was wieder nicht sein kann aufgrund der Injektivität von g). Was ist also der Vorteil, die Hilfsfunktion h eingeführt zu haben?

Jetzt erreichen sowohl f *als auch* h Ihr größten Wert $n+1$ bzw. $m+1$ in x_0 – und, aufgrund ihrer Bijektivitiät, nur dort! Somit kann man ihre Einschränkungen auf $M \setminus \{x_0\}$ betrachten, nämlich

$$\tilde{f}_{|M\setminus\{x_0\}} : M \setminus \{x_0\} \to [1, n]_{\mathbb{N}}, \qquad \tilde{h}_{|M\setminus\{x_0\}} : M \setminus \{x_0\} \to [1, m]_{\mathbb{N}}.$$

Nun sind wir so weit: $\tilde{f}$ und $\tilde{h}$ sind bijektive Funktionen mit der selben Definitionsmengen und mit Werten in zwei natürlichen Intervallen $[1, n]_{\mathbb{N}}, [1, m]_{\mathbb{N}}$. Wegen unsere Induktionsvoraussetzung gilt dann $n = m$ und somit (dank den Peanoschen Axiomen!) $n + 1 = m + 1$. □

Satz 2.23. *Es seien E, F nichtleere Mengen mit $|E|, |F| \in \mathbb{N}$ und f eine Funktion von E nach F.*
(1) Ist f injektiv, so ist $|F| \geq |E|$;
(2) Ist f surjektiv, so ist $|F| \leq |E|$.
(3) Ist f bijektiv, so ist $|F| = |E|$.

Beweis. (a) Ist f injektiv, so haben paarweise verschiedene Argumente paarweise verschiedene Werte, und somit hat $f(E)$ genauso viele Elemente, wie E. Da $f(E) \subset F$, folgt die Aussage.
(b) Ist f surjektiv, so gibt es für jedes $y \in F$ mindestens ein $x \in E$ sodass $\{x\} \subset f^1(\{y\})$. Da aufgrund der Definition von Funktion Urbilder zweier verschiedener Werte immer disjunkt sind, hat $f^{-1}(V) \subset E$ mindestens m Elemente.
(c) Die Aussage folgt unmittelbar aus (a) und (b). □

Anhand des Begriffs von Kardinalität kann man folgende Definitionen einführen.

inftyset

Definition 2.24. *Eine Menge M heißt **unendlich**, falls es für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge N gibt, mit $|N| = m$. Sie heißt endlich sonst, d.h., falls $|M| \in \mathbb{N}$.*

Übungsaufgabe 2.25. Es sei M eine Menge. Zwei Alternative Definitionen ihrer Unendlichkeit sind die folgenden:

- Es existiert eine echte Teilmengen N von M und eine bijektive Funktion $h : M \to N$.
- Es existiert eine injektive aber nicht surjektive Funktion $f : M \to M$.

Zeige, dass jede dieser Definitionen äquivalent zur Definition inftyset 2.24 ist.

Satz 2.26. *Es sei M eine Menge. Es sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ nur rekursiv definiert, d.h.,*

- *$f(0)$ sei gegeben und*
- *es gebe eine Vorschrift, mit der aus $f(n-1)$ der Wert $f(n)$ bestimmbar sei.*

Dann ist die Funktion eindeutig bestimmt.

Diesen Satz haben wir schon (ohne das explizit zu erwähnen) verwendet, um die Summe zweier natürlichen Zahlen anhand der Peanoschen Axiome zu definieren.

Beweis. Der Beweis erfolgt über Induktion. Es sei $A(n)$ die Aussage „$f(n)$ ist eindeutig bestimmt“. Dann gelten sowohl der Induktionsanfang $A(1)$ als auch der Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ nach Voraussetzung. □

Beispiel 2.27. Die möglicherweise berühmteste rekursiv definierte Funktion wurde von Leonardo „Fibonacci“ Pisano 1202 erfunden. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f(n) := f(n-1) + f(n-2),\ n = 2, 3, \ldots.$$

Dass f wohldefiniert kann man durch vollständige Induktion beweisen (Wie?). Die biologische Motivation für die Einführung von f ist naiv, f taucht aber erstaunlicherweise oft in der Natur auf. Es ist z.B. bekannt, dass männliche Honigbiene ohne Befruchtung, aber weibliche mit Befruchtung zeugen – anders gesagt hat jedes Männchen ein Elternteil und jedes Weibchen zwei. Ein Männchen hat somit 1 Elter (seine Mutter), 2 Großeltern (Mutter und Vater seiner Mutter), 3 Ur-großeltern (beide Eltern seiner Großmutter und die Mutter seines Großvaters, 5 Ur-urgroßeltern, 8 Ur-ur-ur-großeltern usw., und i.A. $f(n)$ (Ur)$^{n-3}$-großeltern, $n \geq 3$, mit $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(5) = 5$, $f(6) = 8, \ldots$. □

KAPITEL 3

Algebraische Strukturen und Ordnungseigenschaften von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Definition 3.1. *Es sei G eine Menge und $* : G \times G \to G$ eine Funktion – man schreibt in der Regel*

$$x * y \qquad \text{statt} \qquad *(x, y).$$

Das Paar $(G, *)$ heißt ***Halbgruppe****, falls $*$* ***assoziativ*** *ist, d.h., falls:*

- *für alle $x, y, z \in G$ $(x * y) * z = x * (y * z)$.*

Es heißt ***Monoid****, falls $(G, *)$ eine Halbgruppe ist und zusätzlich*

- *es ein Element $e \in G$ gibt, so dass $x * e = x = e * x$ (sog.* ***neutrales Element****).*

Es heißt ***Gruppe****, falls $(G, *)$ ein Monoid ist und zusätzlich zu jedem Element von G ein bzgl. $*$ inverses Element existiert, d.h., falls*

- *zu jedem $x \in G$ es ein (von x abhängiges!) weiteres Element $y \in G$ existiert, so dass $x * y = y * x = e$ (sog.* ***inverses Element****).*

Eine Halbgruppe oder Gruppe $(G, *)$ heißt ***Abelsch****, falls*

- *für alle $x, y \in G$ gilt $x * y = y * x$.*

ein0 Anmerkung 3.2. Jede Gruppe besitzt genau *ein* neutrales Element, denn zwei neutrale Elemente e, f erfüllen

$$e = e * f = f.$$

Beispiel 3.3. Es sei X eine nichtleere Menge.

- Durch
$$M * N := M \cap N, \qquad M, N \subset X,$$
wird auf $G := \mathcal{P}(X)$ eine assoziative Operation definiert, die X als neutrales Element hat: somit ist $(\mathcal{P}(X), \cap)$ ein Monoid.
- Durch
$$f * g := f \circ g, \qquad f, g : X \to X,$$
wird auf $G := \{f : X \to X\}$ eine assoziative Operation definiert, welche die identische Funktion als als neutrales Element hat: somit ist $(\{f : X \to X\}, \circ)$ ein Monoid.

□

Die Operation einer Gruppe kann man – statt mit $*$ – auch anders bezeichnen: herkömmlich verwendet man die Symbole $+$ oder $\cdot$ (und dann wird das inverse Element von x durch $-x$ bzw. x^{-1} (oder oft $1/x$) bezeichnet): dies führt zu den Notationen

$$x + y \qquad \text{und} \qquad x \cdot y \text{ (oder oftmals } xy).$$

Mittels der Peanoschen Axiome (und insbesondere des Begriffs vom „Nachfolger“) definiert man die Addition $+$ zweier natürlicher Zahlen. Man beachte, dass die Addition auf $\mathbb{N}$ keine Gruppenoperation bildet, denn das neutrale Element von $(\mathbb{N}, +)$ ist laut Anmerkung 3.2 notwendigerweise die 0, aber keine natürliche Zahl (bis auf 0) hat eine Inverse bzgl. $+$: z.B. hat

$$x + 1 = 0$$

keine Lösung in $\mathbb{N}$, da $x+1 = s(x)$ die Nachfolgerzahl von x ist (P2), aber $s(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (P3). Also muss man eine neue Struktur (axiomatisch) einführen, wenn man $(\mathbb{N}, +)$ zu einer Gruppe erweitern will.

Definition 3.4. *Man bezeichnet mit $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppenerweiterung von $(\mathbb{N}, +)$, d.h., die kleinste Gruppe, die $(\mathbb{N}, +)$ enthält. Für ein $n \in \mathbb{N}$ wird sein bzgl. $+$ inverses Element mit $-n$ bezeichnet. Man schreibt*

$$m - n := m + (-n),$$

*Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen **ganze Zahlen**.*

Somit kann man $\mathbb{Z}$ wie üblich als $\{z : z \in \mathbb{N} \text{ oder } -z \in \mathbb{N}\}$ definieren.

Definition 3.5. *Es sei G eine Menge und $+, \cdot : G \times G \to G$ zwei Funktionen. Das Tripel $(G, +, \cdot)$ heißt **Ring**, falls*

- *$(G, +)$ eine abelsche Gruppe;*
- *$(G, \cdot)$ eine Halbgruppe;*
- *für alle $x, y, z \in G$ gilt $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.*

*Ein Ring $(G, +, \cdot)$ heißt zudem ein **Körper**, falls zusätzlich*

- *$(G \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.*

Somit ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sogar ein Ring, denn erweitert man $\mathbb{Z}$ auch um die Multiplikation $\cdot$, so ist $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ein abelsches Monoid (mit neutralem Element 1). Doch ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $x + y \neq 0$ für jedes $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definition 3.6. *Man bezeichnet mit $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ die Körpererweiterung von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, d.h., den kleinsten Körper, der $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ enthält. Für ein $m \in \mathbb{Z}$ wird sein bzgl. $\cdot$ inverses Element mit m^{-1} bezeichnet. Man schreibt*

$$\frac{n}{m} := nm^{-1},$$

*Die Elemente von $\mathbb{Q}$ heißen **rationale Zahlen**.*

Somit

$$\mathbb{Q} = \left\{ \left[\frac{n}{m} \right]_R : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

wobei die Äquivalenzrelation R durch

$$\frac{m}{n} R \frac{m'}{n'} \qquad :\Leftrightarrow \qquad mn' = nm'$$

definiert wird.

Anmerkung 3.7. Da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist, hat für jedes feste $x \in \mathbb{Q}$ die Menge

$$\left\{ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \exists p \in \mathbb{Z} \text{ s.d. } \frac{p}{q} = x \right\}$$

ein (einziges!) Minimum q_0. Somit hat die rationale Zahl x, also die Äquivalenzklassen solcher $\frac{p}{q}$, einen bestimmten Vertreter

$$x = \frac{p_0}{q_0},$$

der **gekürzter Bruch** genannt wird. Hierbei bezeichnet p_0 die zu q_0 gehörige ganze Zahl.

Anmerkung 3.8. Dass es eine überhaupt eine Körpererweiterung von $\mathbb{Z}$ und eine Gruppenerweiterung von $\mathbb{N}$ gibt, soll man selbstverständlich zeigen. Das wird in dieser Vorlesung nicht gemacht, man weist stattdessen auf [Ama I, § I.9] hin.

Anmerkung 3.9. Ein Körper braucht nicht unendlich zu sein. Z.B. wird die Menge $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit den Operationen $+, \cdot$ versehen, welche durch

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

definiert werden, so bildet $\mathbb{F}_2$ ein Körper.

In der Tat werden Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ keine neue Eigenschaft besitzen, vielmehr hat $\mathbb{R}$ eine reichere Ordnungsstruktur als $\mathbb{Q}$. Das hat tatsächlich mit der Möglichkeit, Wurzeln von beliebigen reellen Zahlen ziehen zu können, zu tun.

Man sieht, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ totalgeordnete Mengen für die Relationen $\leq := \leq_{\mathbb{Z}}$ bzw. $\leq := \leq_{\mathbb{Q}}$ sind, die man mittels der Kompatibilitätsbedingungen

- $m + p \leq n + p$ für alle $m, n, p \in \mathbb{Z}$, falls $m \leq n$, und
- $m \cdot n \geq 0$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, falls $0 \leq n$ und $0 \leq m$,

von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ erweitert, und durch

- $\frac{m}{p} \leq \frac{m}{q}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, falls $mq \leq np$,

weiter von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$.

gaussfunk BEISPIEL 3.10. Die **Gaußsche Klammerfunktion** $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ist durch

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

definiert. Beispielsweise gilt

$$\lfloor \pi \rfloor := 3 \qquad \text{und} \qquad \lfloor -2 \rfloor = -2.$$

Offensichtlich ist diese Funktion surjektiv aber nicht injektiv. □

DEFINITION 3.11. *Ein Quadrupel $(G, +, \cdot, \leq)$ heißt **geordneter Körper**, falls*

- *$(G, +, \cdot)$ ein Körper ist,*
- *$\leq$ eine Totalordnung auf G ist, und*
- *$m + p \leq n + p$ für alle $m, n, p \in G$, falls $m \leq n$, und*
- *$m \cdot n \geq 0$ für alle $m, n \in G$, falls $0 \leq n$ und $0 \leq m$*

(wobei 0 das neutrale Element bzgl. + bezeichnet).

Ist $x \geq 0$ (bzw. $x \leq 0$), so heißt x positiv *(bzw.* negativ*); ist $x > 0$ (bzw. $x < 0$), so heißt x* strikt positiv *(bzw.* strikt negativ*).*

propcorpord ÜBUNGSAUFGABE 3.12. Es sei $(G, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Zeige, dass es insbesondere für alle $m, n, p \in \mathbb{G}$ gilt:

(1) genau dann $0 \leq n$, wenn $-n \leq 0$;
(2) genau dann $n \leq m$, wenn $0 \leq m - n$;
(3) $np \leq mp$, wenn $n \leq m$ und $0 \leq p$;
(4) ist $n > 0$, so gilt genau dann $m \cdot n > 0$, wenn $m > 0$;
(5) $n^2 > 0$ für alle $n \in G \setminus \{0\}$;
(6) genau dann $0 < n$, wenn $0 < n^{-1}$;
(7) $0 < n < m$, falls $0 < m^{-1} < n^{-1}$.

ordf2 ÜBUNGSAUFGABE 3.13. Die einzigen totalen Ordnungsrelationen auf $\mathbb{F}_2$ sind

$$\{(0,0), (0,1), (1,1)\} \quad \text{und} \quad \{(0,0), (1,0), (1,1)\}.$$

Folgere aus der Übungsaufgabe propcorpord 3.12, dass $\mathbb{F}_2$ kein geordneter Körper sein kann.

ÜBUNGSAUFGABE 3.14. Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge und $H \subset G$. Dann sagt man, dass H **dicht in G liegt**, falls

- für alle $x, y \in G$ es $z \in H$ existiert mit $x < z < y$.

Zeige, dass weder $\mathbb{N}$ noch $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ dicht liegen, dafür aber $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$.

Da $\mathbb{Q}$ totalgeordnet ist, können wir eine besondere Klasse von Mengen einführen.

abgeQ

DEFINITION 3.15. *Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Dann heißt die Menge*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall *mit* ***Endpunkte*** *a, b. Weiter betrachtet man auch das* ***offene Intervall***

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$$

und die beiden ***halboffenen Intervalle***

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x < b\} \qquad \textit{und} \qquad (a, b] := \{x \in \mathbb{Q} : a < x \leq b\}.$$

Man führt auch die ***nach oben*** *bzw.* ***nach unten unbeschränkten abgeschlossenen Intervalle***

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x\} \qquad \textit{und} \qquad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq b\}$$

sowie die ***nach oben*** *bzw.* ***nach unten unbeschränkten offenen Intervalle***

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{Q} : a < x\} \qquad \textit{und} \qquad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{Q} : x < b\}$$

ein.

Nach Definition ist ein Intervall nie leer.

DEFINITION 3.16. *Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge. Es sei $M \subset G$. M heißt* ***nach oben beschränkt****, falls es in G eine obere Schranke von M gibt.*

Ähnlich heißt M ***nach unten beschränkt****, falls ein $x \in \mathbb{G}$ existiert, so dass $x \leq y$ für alle $y \in M$: ein solches $x \in \mathbb{G}$ heißt* ***untere Schranke von*** *M.*

Gehört die obere bzw. untere Schranke zu M selbst, so heißt sie ***Maximum*** *bzw.* ***Minimum*** *von M, bezeichnet durch $\max M$ bzw. $\min M$.*

Die Menge heißt nach oben bzw. nach unten ***unbeschränkt****, wenn sie nicht nach oben oder nach unten beschränkt ist. Sie heißt* ***beschränkt****, wenn sie nach oben* und *nach unten beschränkt ist.*

DEFINITION 3.17. *Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge. Es sei $A \subset G$ und betrachte die Menge $M_{\leq}(A)$ der oberen Schranken von A. Hat $M_{\leq}(A)$ ein Minimum x, so heißt x das* ***Supremum*** *von A, $x := \sup(A)$.*

Ähnlich, betrachte die Menge $M_{\geq}(A)$ der unteren Schranken von A. Hat $M_{\geq}(A)$ ein Maximum y, so heißt y das ***Infimum*** *von A, $x := \inf(A)$.*

LEMMA 3.18. *Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge. Es seien $A \subset G$ und $x \in G$. Dann ist genau dann $x = \max A$, falls $x \in A$ und $x = \sup A$.*

BEWEIS. Ist $x = \max A$, so ist x nach Definition eine obere Schranke von A und $x \in A$, also notwendingerweise die kleinste der oberen Schranken (gäbe es eine noch kleiner Schranke z, so wäre $z < x$, und damit kleiner als ein Element von A, also doch keine obere Schranke von A).

Ist nun $x = \sup A$, so ist x eine obere Schranke von A, die eben A angehört. $\square$

supchar

LEMMA 3.19. *Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge. Es seien $A \subset G$ und $x \in G$.*

(1) Dann ist genau dann $x = \sup A$, falls
   (i) $y \leq x$ für alle $y \in A$ und
   (ii) ist $z \in G$ mit $z < x$, so gibt es $y \in A$ mit $z < y$.

(2) Analog gilt: genau dann ist $x = \inf A$, falls
   (i) $y \geq x$ für alle $y \in A$ und
   (ii) ist $z \in G$ mit $z > x$, so gibt es $y \in A$ mit $z > y$.

Beweis. Wir zeigen nur (1).

Ist $x = \sup A$, so ist x nach Definition eine obere Schranke von A, was (i) liefert. Es sei weiter $z \in G$ mit $z < x$: dann ist z keine obere Schranke von A, d.h., es gibt ein Element aus A, das strikt größer als z ist – das ist die Aussage von (ii).

Um die Rückrichtung zu beweisen, beachte, dass x nach (i) eine obere Schranke von A ist. Sie ist auch die *kleinste* obere Schranke: Gäbe es eine weitere obere Schranke z von A mit $z < x$, so gelte laut (ii) $z < y$ für ein $y \in A$, d.h., z wäre doch keine obere Schranke – Widerspruch! □

Definition 3.20. *Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge.*

- *Man sagt, dass G* ***ordnungsvollständig*** *ist, falls jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von G ein Supremum hat.*
- *Man sagt, dass G die* ***Dedekindsche Schnitteigenschaft*** *hat, falls für je zwei Teilmengen $A, B \subset G$, für die*
$$a \leq b \qquad \forall (a,b) \in A \times B$$
gilt, es ein $c \in G$ mit $a \leq c \leq b$ gibt, so dass
$$a \leq c \leq b \qquad \forall (a,b) \in A \times B$$

Die Schnitteigenschaft wurde 1858 von Richard Dedekind entdeckt, jedoch erst 1872 veröffentlicht.

lemma:dedek

Lemma 3.21. *Es sei $(G, \leq)$ eine totalgeordnete Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) G ist ordnungsvollständig.
(ii) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von M hat ein Infimum.
(iii) G hat die Dedekindsche Schnitteigenschaft.

Beweis. “$(i) \Rightarrow (ii)$” Es sei A eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von G. Dann ist $B := \{b \in M : b \leq a \text{ für alle } a \in A\}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von G. Somit existiert $\sup(B)$. Nach Definition ist $\sup(B)$ die kleinste obere Schranke, und da jedes Element von A eine obere Schranke von B ist, folgt dass $\sup(B) \leq a$ für alle $a \in A$. Somit ist $\sup(B) \in B$ und, nach Definition, $\sup(B)$ ist sogar das Maximum von B.

“$(ii) \Rightarrow (iii)$” Es seien $A, B \subset G$ mit der Eigenschaft, dass
$$a \leq b \qquad \forall (a,b) \in A \times B.$$
Da jedes $a \in A$ eine untere Schranke von B ist gibt es $c := \inf(B)$. (Ähnlich existiert auch $\sup(A)$: das werden wir aber nicht verwenden), und insbesondere ist $c \leq b$ für alle $b \in B$. Dieses Element ist nach Definition auch die *größte* untere Schranke, d.h., $c \geq a$ für alle $a \in A$.

“$(i) \Rightarrow (ii)$” Es sei A eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von G. Dann ist $B := \{b \in G : b \geq a \text{ für alle } a \in A\}$ eine nichtleere Teilmenge von G, für die $a \leq b$ gilt, für alle $(a,b) \in A \times B$. Die Schnitteigenschaft liefert dann die Existenz eines $c \in G$ mit $a \leq c \leq b$ für alle $(a,b) \in A \times B$, d.h., einer unteren Schranke von B, die selber eine obere Schranke von A ist – d.h., sie liefert die Existenz eines Minimums von B. Da aber B genau die Menge der oberen Schranken von A ist, ist c das Supremum von A. □

Übungsaufgabe 3.22. Wie könnte ein alternativer Beweis von “$(i) \Leftrightarrow (ii)$” in einem totalgeordneten Körper aussehen?

Übungsaufgabe 3.23. Zeige: Das Infimum einer Menge aus positiven (bzw. negativen) Zahlen ist stets positiv (bzw. negativ), aber das Infimum einer Menge aus *strikt* positiven (bzw. strikt negativen) Zahlen muss nicht *strikt* positiv (bzw. negativ) sein: betrachte z.B. die Menge $(0,1)$, deren Infimum 0 ist.

Beispiel 3.24. Betrachte die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$. Dann ist M nach unten beschränkt, denn jede rationale Zahl $\frac{n}{m}$ mit $n \leq 0$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist eine untere Schranke: 0 ist Infimum und auch Minimum von M. □

Beispiel 3.25. Die Menge $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Ihr Minumum ist 0. $\square$

Anmerkung 3.26. Es sei M eine nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann verwendet man die Schreibweise

$$\sup M = +\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \inf M = -\infty.$$

Auch verwendet man konventionell die Schreibweise

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Z.B. kann man so sagen, dass jede nichtleere Menge ein Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$ hat.

Offensichtlich sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ ordnungsvollständig, $\mathbb{Q}$ jedoch nicht: Betrachte die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}.$$

Dann ist M nach oben beschränkt, denn z.B. 2 ist eine obere Schranke. Wie man schon ahnt wäre die kleinste obere Schranke $\sqrt{2}$, die aber *nicht* in $\mathbb{Q}$ liegt.

sqrt2satz

Satz 3.27. *1) Die Gleichung*

$$x^2 - 2 = 0$$

hat in $\mathbb{Q}$ keine Lösung.

2) Der Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig.

Das heißt, die Zahl $\sqrt{2}$ gehört nicht zu $\mathbb{Q}$, und somit hat die nichtleere, nach oben beschränkte Menge M kein Supremum.

Beweis. 1) Es sei $x \in \mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung, dann lässt sie sich als gekürzten Bruch $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ darstellen. Dann ist $m^2 = 2n^2$, und somit ist m^2 gerade. Es folgt unmittelbar, dass m selber gerade ist, also $m = 2p$ für ein passendes $p \in \mathbb{Z}$. Also gilt $4p^2 = (2p)^2 = m^2 = 2n^2$, also $2p^2 = n^2$, und somit sind auch n^2 und n gerade. Der Bruch ist also nicht vollständig gekürzt.

2) Betrachte die Mengen M und

$$N := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}.$$

Dann ist $1 \in M$ und $2 \in N$, somit sind M, N nicht leer und nach oben bzw. nach unten beschränkt. Da

$$b - a = \frac{b^2 - a^2}{b + a} > 0 \qquad \text{für alle } (a, b) \in M \times N,$$

folgt es, dass $a < b$ für alle $(a, b) \in M \times N$.

Gäbe es ein $c \in \mathbb{Q}$ mit

$$a \le c \le b \qquad \text{für alle } (a, b) \in M \times N,$$

so würde für

$$d := \frac{2c + 2}{c + 2} > 0$$

gelten, dass

$$d = c - \frac{c^2 - 2}{c + 2} \qquad \text{und} \qquad d^2 - 2 = \frac{2(c^2 - 2)}{(c + 2)^2}.$$

Da $x^2 \ne 2$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, es muss entweder $c^2 < 2$ oder $c^2 > 2$ sein. Im ersteren Fall würde folgen, dass $d > c$ und $d^2 < 2$, d.h., $d > c$ und $d \in M$, ein Widerspruch zur Definition von c. Im zweiten Fall würde folgen, dass $d < c$ und $d^2 > 2$, d.h., $d < c$ und $d \in N$, noch ein Widerspruch zur Definition von c. $\square$

Wir definieren die Menge der reellen Zahlen durch eine abstrakt Eigenschaft wie folgt.

reellkonstr **Theorem 3.28.** *Es gibt einen ordnungsvollständigen Körper, den man mit* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *bezeichnet. Dieser Körper enthält eine* isomorphe Kopie *von* $\mathbb{Q}$*, d.h., es gibt einen injektiven Homomorphismus von* $\mathbb{Q}$ *nach* $\mathbb{R}$*.*

Dabei ist für je zwei Ringe R, R' (und insbesondere für je zwei Körper) ein **Ringhomomorphismus**, oder einfacher: ein **Homomorphismus** eine Abbilung $\phi : R \to R'$, die

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad \text{und} \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \qquad \forall a, b \in R,$$

erfüllt. Ein bijektiver Homomorphismus heißt **Ringisomorphismus** oder einfacher ein **Isomorphismus**. Zwei Ringe R, R' heißen Isomorph, falls es ein Isomorphismus von R nach R' gibt.

Die Menge $\mathbb{R}$, die man konstruiert, ist wohl keine Menge von Zahlen im herkömmlichen Sinne. Was wir vielmehr machen ist, Zahlen mit (ausgezeichneten) Teilmengen von $\mathbb{Q}$ zu identifizieren.

Beweis. Betrachte die Menge der Teilmengen $R \subset \mathbb{Q}$ mit den Eigenschaften

- $R \neq \emptyset$ und $R \neq \mathbb{Q}$;
- das Komplement von R stimmt mit $\{x \in \mathbb{Q} : x < r \text{ für alle } r \in R\}$ überein;
- R hat kein Minimum.

Wir werden diese Menge von Teilmenge (d.h., diese Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$) mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Betrachte die Funktion

identifQR (3.1) $$\varphi : \mathbb{Q} \ni r \mapsto \{x \in \mathbb{Q} : x > r\} \in \mathbb{R}.$$

Da die Funktion $(\varphi, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ injektiv ist, ist die Funktion $(\varphi, \mathbb{Q}, \varphi(\mathbb{Q}))$ bijektiv. Man muss noch eine Addition, eine Multiplikation und eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}$ definieren – und beweisen, dass die damit versehene Menge $\mathbb{R}$ ein ordnungsvollständiger Körper ist.

Erst definieren wir eine Ordnungsrelation (da sie auch bei der Definition einer Multiplikation eine Rolle spielen wird). Man *definiert* ein Element $R \in \mathbb{R}$ als *kleiner/gleich* $R' \in \mathbb{R}$, falls $R' \subset R$. Nun, die so definierte Relation ist auch für $\mathbb{R}$ offensichtlich eine Halbordnung, da $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \subset)$ eine Halbordnung ist. Dass sie auch total ist, kann man so sehen: Es seien R, R' Elemente von $\mathbb{R}$. Ist $R = R'$, so muss man nichts zeigen. Gilt aber $R \neq R'$, etwa $R \not\subset R'$, so gibt es $x \in R \setminus R'$ (wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$), d.h., $x \leq y$ für alle $y \in R'$, und insbesondere $y \in R$ für alle $y \in R$. Somit $R' \subset R$, d.h., $R \leq R'$. Ist jedoch $R' \not\subset R$, so kann man entsprechend zeigen, dass $R \geq R'$ gilt.

Die Addition von Elemente von $\mathbb{R}$ wird durch

$$R + R' := \{x + y \in \mathbb{Q} : x \in R \text{ und } y \in R'\}$$

definiert. Sie ist wohl definiert, d.h., $R + R' \in \mathbb{R}$. Insbesondere: Jedes (nach unten beschränktes aber) nach oben unbeschränktes offene Intervall kann weder mit $\emptyset$ noch mit $\mathbb{Q}$ übereinstimmen, und $R + R'$ hat auch kein Minimum, da weder R noch R' ein Minimum haben (warum?). Darüber hinaus ist $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe, da sie die Menge $0 := (0, +\infty)_{\mathbb{Q}}$ als neutrales Element hat, und für jedes $R \in \mathcal{R}$ ist

$$\{x \in \mathbb{Q} : x + r > 0 \text{ für alle } r \in R\},$$

das bzgl. + zu R inverse Element.

Definiere nun die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ durch

$$R \cdot R' := \begin{cases} \{xy \in \mathbb{Q} : x \in R \text{ und } y \in R'\}, & \text{falls } R, R' \geq 0, \\ -((-R) \cdot R', & \text{falls } R < 0 \leq R', \\ -(R \cdot (-R'), & \text{falls } R \geq 0 > R', \\ (-R) \cdot (-R'), & \text{falls } R, R' \leq 0. \end{cases}$$

Auch die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ist wohl definiert. Darüber hinaus ist $\mathbb{R} \setminus (0, +\infty)_{\mathbb{Q}}$ eine abelsche Gruppe bzgl. $\cdot$, da $(1, +\infty)_{\mathbb{Q}}$ offensichtlich ein neutrales Element ist und für $R \in \mathbb{R}$ ist $R^{-1} := \{x \in \mathbb{Q} : xr > 1 \ \forall r \in R\}$ ein Element aus $\mathbb{R}$ mit $RR^{-1} = (1, +\infty)_{\mathbb{Q}}$.

Schließlich ist die Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ verträglich: es folgt aus

$$R \leq R', \qquad \text{d.h.} \qquad R' \subset R,$$

dass für alle $S \in \mathbb{R}$ mit $S \geq 0$ auch

$$R + S = \{x + y \in \mathbb{Q} : x \in R \text{ und } y \in S\} \supset \{z + y \in \mathbb{Q} : z \in R' \text{ und } y \in S\} = R' + S$$

gilt. Auch gilt, falls $R, R' \geq 0$, dass $RR' \geq 0$, da $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper ist und somit $xy \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x > \alpha$ und $y > \beta$ und $\alpha, \beta \geq 0$.

Man sieht auch, dass $\mathbb{R}$ so konstruiert wurde, dass es ordnungsvollständig ist: denn sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere, von unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$: d.h., gäbe es $R \in \mathbb{R}$ mit $A \subset R$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Für $S := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ sieht man, dass S weder mit $\emptyset$ noch mit $\mathbb{Q}$ übereinstimmt (da $S \subset R$ und $\emptyset \neq R^C \subset S^C$). Auch ist

$$S^C = (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^C = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^C = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{x \in \mathbb{Q} : x < a \ \forall a \in A\} = \{x \in \mathbb{Q} : x < s \ \forall s \in S\},$$

und S hat kein Minimum, da kein $A \in \mathcal{A}$ eines hat. Somit ist $S \in \mathbb{R}$.

Nun sieht man aber, dass $S \leq A$ für alle $A \in \mathcal{A}$, d.h., S ist eine untere Schranke von $\mathcal{A}$. Und gibt es eine weitere untere Schranke $\tilde{S}$ von $\mathcal{A}$ mit $S \leq \tilde{S}$, d.h. $A \subset \tilde{S} \subset S$, so folgt bereits, dass

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \tilde{S} \subset S = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

und somit $S = \tilde{S}$. Wir haben damit bewiesen, dass $S = \inf \mathcal{A}$, und somit, dass $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist. $\square$

Anmerkung 3.29. Die Bildmenge $\varphi(\mathbb{Q})$ kann somit mit $\mathbb{Q}$ identifiziert werden. Dies suggeriert, wie Elemente von $\mathbb{R}$ als Zahlen angesehen werden können. Insbesondere werden wir z.B.

$$q(x) \leq y$$

meinen, wann immer wir

$$x \leq y$$

schreiben, für $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R}$, und allgemeiner jedes Mal, dass wir Elemente von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vergleichen.

Anders gesagt: kann man $\mathbb{Q}$ als disjunkte Vereinigung zweier Mengen A_1, A_2 betrachten, so dass jedes Element von A_1 strikt kleiner als jedes Element von A_2 ist, so können wir eine reelle Zahl mit der Menge A_2 identifizieren. Z.B. wird die Zahl $\sqrt{2}$ *definiert* durch (A_1, A_2), wobei

$$A_1 := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, \qquad A_2 := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}.$$

Definition 3.30. *Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen* ***reelle Zahlen****. Jedes Element aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt* ***irrationale Zahl****.*

Weiter kann man folgendes zeigen.

isomRerw

Satz 3.31. *Jeder weitere ordnungsvollständige Körper, der (bis auf einem Isomorphismus) $\mathbb{Q}$ erweitert, ist selber dem $\mathbb{R}$ isomorph.*

Wir werden ab sofort $\mathbb{Q}$ mit seiner isomorphen Kopie, die Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, identifizieren. Insbesondere werden wir z.B. Ungleichungen wie $x < y$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ schreiben.

Man kann Intervalle von reellen Zahlen definieren, wie schon auch Intervalle rationaler Zahlen eingeführt wurden – allgemeiner können Intervalle definiert werden als Teilmengen jeder halbgeordneten Menge. Im Fall von $\mathbb{R}$ schreibt man oft

$$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R}_- := (-\infty, 0].$$

Definition 3.32. *Man sagt, dass ein geordneter Körper* $(G, +, \cdot, \leq)$ *die* ***archimedische Eigenschaft*** *hat, falls für alle* $x, y \in G$ *mit* $y > 0$ *es* $m \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$x \leq my := \underbrace{y + \ldots + y}_{m \ \mathit{Mal}}.$$

lemma:arch Lemma 3.33. *Der geordnete Körper* $\mathbb{R}$ *hat die archimedische Eigenschaft.*

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $x < 0$, so ist die Eigenschaft offensichtlich erfüllt. Ist $x \geq 0$, so wähle $n = 1$ und betrachte die nichtleere und (durch x) nach oben beschränkte Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. Da $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist, gibt es $\sup(M) \in \mathbb{R}$. *A priori* ist es nicht klar, dass $\sup(M) \in \mathbb{N}$. Es folgt aber aus Lemma 3.19, dass es $p \in M$ (und somit $p \in \mathbb{N}$) gibt, mit

$$\sup(M) - \frac{1}{2} < p.$$

Es sei nun $m := p + 1 > \sup(M) + 1$. Dann ist $m \in \mathbb{N}$ und $m \notin M$ und somit

$$x < \underbrace{1 + \ldots + 1}_{m \ \text{Mal}}.$$

Das vollendet den Beweis. □

mforcauchy Übungsaufgabe 3.34. Folgere aus Lemma 3.33 die folgenden Aussagen.

- Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Gilt $a \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann ist bereits $a = 0$.
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $1/n < a$.

mforcantor Übungsaufgabe 3.35. Es sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$. Folgere aus Lemma 3.33 die folgenden Aussagen.

- Ist $b > 1$, so gibt es zu jedem $k \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > k$.
- Ist $b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

(Hinweis: verwende die Bernoullische Ungleichung aus der Übungsaufgabe 1.61).

Satz 3.36. *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$. *Die folgenden Aussagen gelten.*

(1) Es gibt $q \in \mathbb{Q}$ *mit* $a < q < b$.
(2) Es gibt $s \in \mathbb{Q}$ *mit* $a < s < b$.

Beweis. (1) Da $\mathbb{R}$ die archimedische Eigenschaft hat, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > \frac{1}{b - a} > 0,$$

und somit

archi1
$$nb > na + 1. \tag{3.2}$$

Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es auch $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$m_1 > na \qquad \text{und} \qquad m_2 > -na$$

Somit gilt $-m_2 < na < m_1$ und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$m - 1 \leq na < m$$

(warum?). Das und (3.2) liefern

$$na < m \leq 1 + na < nb$$

und somit folgt die Aussage für $q := m/n$.

(2) Betrachte das selbe $q \in \mathbb{Q}$ wie in (1) und, auch anhand von (1), ein weiteres $p \in \mathbb{Q}$ mit $q < p < b$. Betrachte

$$s := q + \frac{p - q}{\sqrt{2}}.$$

Nun, wäre $s \in Q$, dann wäre auch
$$\sqrt{2} = \frac{p-q}{s-q} \in \mathbb{Q},$$
was den Satz sqrt2satz 3.27 widerspricht. Weiter gilt
$$q < s \qquad \text{und} \qquad p - s = (p-q)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0,$$
und somit $s < p$. Deshalb gilt $q < s < p$ und insbesondere
$$a < s < b.$$
Die Aussage ist vollständig bewiesen. □

Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, hat auch $\mathbb{Q}$ die archimedische Eigenschaft. Das kann aber auch direkt bewiesen werden – was für $\mathbb{R}$ nicht möglich ist, da unsere Konstruktion von $\mathbb{R}$ die Identifikation von natürliche Zahlen als reelle Zahlen nicht unmittelbar erlaubt (eine solche Identifikation werden wir erst später ansprechen).

Übungsaufgabe 3.37. Es seien A, B zwei nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq 0$. Zeige, dass

- $\inf(-A) = -\sup(A)$;
- $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$;
- $\sup(sA) = s\sup(A)$;
- $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$, falls $x, y \geq 0$ für alle $x \in A$ und alle $y \in B$.

Dabei verwenden wir die Schreibweisen
$$A + B := \{x + y \in \mathbb{R} : x \in A \text{ und } y \in B\}, \qquad A \cdot B := \{xy \in \mathbb{R} : x \in A \text{ und } y \in B\}$$
und, für $r \in \mathbb{R}$,
$$rA := \{rx \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$
(Hinweis: Um $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$ zu zeigen, beweise man, dass $\sup(A+B) - x \geq \sup B$ für beliebige $x \in A$.)

ivisionmit Übungsaufgabe 3.38. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$, mit $b \neq 0$. Zeige, dass es $c, r \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass
$$a = bc + r$$
gilt, mit $r \in [0, b)$ falls $b > 0$, oder $r \in [0, -b)$ falls $b < 0$. Zeige auch, dass c und r eindeutig bestimmt sind.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir algebraische Operationen von Funktionen definieren.

Definition 3.39. *Es sei E eine Menge und $(F, +, \cdot)$ ein Körper. Es seien f, g Funktionen mit gleichen Definitions- und Zielmenge E bzw. F. Dann ist die* ***Summe*** *bzw. das* ***Produkt*** *von f und g die neue Funktion $f + g$ bzw. $f \cdot g$, ebenfalls mit Definitions- und Zielmenge E bzw. F, die durch*
$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \qquad x \in E$$
bzw.
$$f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x), \qquad x \in E.$$
definiert sind.

Ist zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in E$, so definiert man auch die ***Quotientenfunktion*** *f/g mit Definitions- und Zielmenge E bzw. F durch*
$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in E.$$

funktvr Anmerkung 3.40. In dieser Weise kann man die Funktionenmenge $\{f : E \to F\}$ mit einer Vektorraumstruktur versehen.

ÜBUNGSAUFGABE 3.41. Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein **Polynom vom Grad** n (mit **Koeffizienten** $a_0, \dots, a_n$) ist eine Funktion $P_n : A \to \mathbb{R}$ der Form

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot^k$$

für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.,

$$P_n(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_n x^n, \qquad x \in A.$$

Eine **Rationale Funktion** ist eine Funktion R der Form

$$R := \frac{P_n}{Q_m}$$

wobei P_n, Q_m zwei Polynome sind.

1) Überprüfe, dass die Menge der rationalen Funktionen von A nach $\mathbb{R}$ ein Körper bzgl. der Funktionenaddition und -multiplikation ist. 2) Überprüfe, dass sie auch eine totalgeordnete Menge bzgl. der Ordnungsrelation

$$\frac{P_n}{Q_m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot^k}{\sum_{h=1}^{m} b_h \cdot^h} =: R \geq 0 \qquad :\Leftrightarrow \qquad a_n \geq 0 \;\; \forall x \in A,$$

ist, wobei a_n das entsprechende Koeffizient von P_n ist. 3) Überprüfe, dass sie ein geordneter Körper ist. 4) Zeige, dass sie die archimedische Eigenschaft nicht hat. (Hinweis: betrachte die Polynome $P_0 : x \mapsto 1$ und $Q_1 : x \mapsto x$ und betrachte die Rationale Funktionen

$$R_1 := \frac{P_0}{Q_1} \qquad \text{und} \qquad R_2 := \frac{P_0}{P_0}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.42. Es sei E eine Menge, G eine halbgeordnete Menge. Definiere eine Ordnungsrelation für Funktionen von E nach $\mathbb{R}$ wie folgt:

$$f \leq g \qquad :\Leftrightarrow \qquad f(x) \leq g(x) \; \forall x \in E.$$

Zeige, dass $\leq$ eine Halbordnung auf $\{f : E \to \mathbb{R}\}$ ist, die nicht total ist.

DEFINITION 3.43. *Es seien G_1, G_2 zwie Halbgeordnete Mengen und $f : G_1 \to G_2$. Es seien $x, y \in G_1$.*

- *Folgt aus $x < y$, dass $f(x) \leq f(y)$, so heißt f **monoton wachsend**.*
- *Folgt aus $x < y$, dass $f(x) < f(y)$, so heißt f **streng monoton wachsend**.*
- *Folgt aus $x < y$, dass $f(x) \geq f(y)$, so heißt f **monoton fallend**.*
- *Folgt aus $x < y$, dass $f(x) > f(y)$, so heißt f **streng monoton fallend**.*

ÜBUNGSAUFGABE 3.44. Zeige, dass die Verkettung zweier monoton wachsenden bzw. fallenden Funktionen auch monoton wachsend bzw. fallend ist. Finde Beispiele dafür, dass die Verkettung einer monoton wachsenden und einer monoton fallenden Funktion nicht monoton sein muss.

ÜBUNGSAUFGABE 3.45. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$, so dass $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei weiter $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$. Zeige: Es gibt genau ein $s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (d.h. $s \in \mathbb{R}$ und $s \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Eine solche Intervallfolge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Intervallschachtelung.*

Zeige umgekehrt auch: Für alle $s \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallenschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

KAPITEL 4

Konvergenz von Folgen

normfolgen

Definition 4.1. *Es sei $x \in \mathbb{R}$. Der* ***Betrag*** *$|x|$ von x wird durch*

betragr (4.1)
$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert.

Der Betrag einer reellen Zahl entspricht dem Abstand zwischen x und 0 auf der reellen Achse. Die drei wesentlichen Eigenschaften des Betrags werden im Folgenden geschildert.

dreiecks Lemma 4.2. *Es seien $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(N1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung),*
(N3) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ *(Multiplikativität des Betrags),*

Übungsaufgabe 4.3. Beweise die Aussagen in Lemma 4.2 durch Fallunterscheidung.

Übungsaufgabe 4.4. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und betrachte die Menge $\{x, y\}$. Zeige, dass

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

für jedes $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $\max\{x, y\}$ die größere der beiden Zahlen x, y und $\min\{x, y\}$ die kleinere der beiden Zahlen x, y bezeichnet.

Wie wir gleich sehen werden, sind diese Eigenschaften keinesfalls ausschließlich für den Betrag. Vielmehr sind wir motiviert, den folgenden Begriff einzuführen. (Wir setzen die Kenntnis der Definition von *Vektorräumen* voraus).

Definition 4.5. *Es sei X ein Vektorraum über ein Körper $\mathbb{K}$. Eine* ***Norm*** *$\|\cdot\|$ auf X ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ so dass die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) aus Lemma 4.2 für $|\cdot| := \|\cdot\|$ gelten, für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$.*
Ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt ***normierter Raum****.*

Rm Beispiel 4.6. Betrachte das kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^d := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{d \text{ Mal}}$$

und setze

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}, \qquad x := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

sowie

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{d} |x_k|, \qquad x := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

Dann sind sowohl $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ als auch $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$ ein normierte Räume. Sie stimmen zwar als Mengen überein, doch ihre Normen unterscheiden sich, und insbesondere werden die Abstände zwischen Punkten anders gemessen. Z.B. sehen die **Einheitskugeln**

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$$

anders aus: die erste Menge ist eine in 0 zentrierte "runde" Kugel mit Radius 1, die zweite ist ein in 0 zentriertes Drachenviereck mit Seitenlänge $\sqrt{2}$. Die Norm $\|\cdot\|_2$ wird **Euklidische Norm** genannt.

(Wenn wir einfach $\|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben, bzw. wenn wir ohne weitere Angaben $\mathbb{R}^d$ als normierte Raum auffassen, werden wir immer die Euklidische Norm von x meinen). □

Übungsaufgabe 4.7. Beweise die Aussagen im Beispiel Rm 4.6.

Definition 4.8. *Es sei X ein normierter Raum.*

*(1) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass $\|x\| \leq M$ für alle $x \in A$. Dabei heißt M eine **Schranke** von A.*

*(2) Es sei E eine weitere nichtleere Menge. Dann heißt eine Funktion $f : E \to X$ **beschränkt**, falls ihre Zielmenge $f(E)$ beschränkt ist.*

Beispiel 4.9. Das **Signum** $\operatorname{sign} x$ von einer $x \in \mathbb{R}$ wird durch

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert. Somit definiert sign eine beschränkte, monoton (aber nicht streng monoton) wachsende Funktion.

Binfty Beispiel 4.10. Es seien E eine nichtleere Menge und X ein normierter Raum. Dann ist nicht nur die Menge $\{f : E \to X\}$, die in der Anmerkung funktvr 3.40 eingeführt wurde, ein Vektorraum, sondern auch ihre Teilmenge $B(E, X)$ aller Funktionen von E nach X, die beschränkt sind.

Es sei $f : E \to X$ eine beschränkte Funktion. Da $f(E)$ beschränkt ist, ist auch

$$\{\|f(x)\| : x \in E\}$$

eine nichtleere (da $E \neq \emptyset$) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ hat also diese Menge ein Supremum, das man mit

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} \|f(x)\|, \qquad f \in B(E, X),$$

bezeichnet. Man kann zeigen, dass $(B(E, X), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum ist. Die Untersuchung der Normstrukturen auf Funktionenmengen ist ein wichtiges Thema der Funktionalanalysis – genauer gesagt, der unendlichdimensionalen linearen Algebra. □

Somit sehen wir, dass definitionsgemäß eine Funktion genau dann beschränkt ist, wenn es $M \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$\|f(x)\| \leq M \qquad \forall x \in E.$$

umgeb Beispiel 4.11. Es sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

von X eine **ε-Umgebung** von x_0. □

Offensichtlich ist jede ε-Umgebung eine Teilmenge von X, die beschränkt (mit Schranke $\|x_0\| + \varepsilon$) ist.

arc Beispiel 4.12. Betrachte

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1 \text{ und } x_1 \geq 0 \text{ und } x_2 \geq 0\}.$$

Dann ist M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, mit Schranke $M = 1$. Wie sieht sie aus? □

r+ Beispiel 4.13. Die Teilmenge $\mathbb{R}^d_+ := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^d : x_N \geq 0\}$ ist unbeschränkt, denn für ein beliebig großes $M > 0$ erfüllt z.B. $m := (M, \dots, M)$ die Ungleichung $\|m\| > M$. □

Übungsaufgabe 4.14. Beweise die Aussage im Beispiel Rm 4.6

Übungsaufgabe 4.15. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Folgere aus der Dreiecksungleichung, dass die *Inverse Dreiecksungleichung*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

gilt.

Anmerkung 4.16. Es sei X ein Vektorraum. Eine **Metrik** auf einem Vektorraum X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$$

so dass für alle $x, y, z \in X$

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$, und
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

Dann heißt (X, d) ein **metrischer Raum**.

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf X. Dann definiert

$$d(x, y) := \|x - y\|, \qquad x, y \in X,$$

eine Metrik auf X (warum?). Umgekehrt kann man aber *nicht* jede Norm wie oben durch eine Metrik darstellen.

Fast alle Sätze, die wir in dieser Vorlesung für metrische Räume formulieren werden, gelten in der Tat bereits für metrische Räume (meistens mit dem selben Beweis). Weil Beispiele von metrischen, nichtnormierten Räume einigermaßen von fortgeschrittenem Niveau sind (sie werden näher in der Vorlesung *Funktionalanalysis* betrachtet), werden wir uns begnügen, die Sätze für normierte Räume zu formulieren.

Definition 4.17. *Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn es eine Bijektion $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.*

*Gibt es keine Teilmenge N von $\mathbb{N}$, für die eine Bijektion $f : M \to N$ existiert, so heißt M **überabzählbar**.*

Anmerkung 4.18. (1) Ist eine Menge M abzählbar, so gibt es keine eindeutige *Abzählung*, d.h., M kann nach $\mathbb{N}$ unter unendlich vielen Bijektionen abbilden. Dennoch ist es sicherlich möglich, *eine* solche Bijektion zu betrachten: entsprechend kann man (und das werden wir immer wieder machen) eine Darstellung der Form

$$M = \{y_0, y_1, \dots, \} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

verwenden, wobei y_n das *n-te Element von M ist.*

Gelegentlich werden wir dennoch bevorzugen, andere Indexmengen zu verwenden, etwa $\mathbb{Z}$.

(2) Definitionsgemäß ist jede abzählbare Menge auch unendlich. Manchmal spricht man deshalb von *höchstens abzählbaren Mengen*, um zu sagen, dass die entweder endlich sind, oder abzählbar.

Insbesondere gilt folgendes: Ist eine Menge abzählbar, so ist jede ihrer Teilmengen abzählbar; ist eine Menge überabzählbar, so ist es auch jede weitere Menge, die sie enthält.

Wir merken an, dass die Abzählbarkeit einer Menge dazu äquivalent ist, dass man einen Algorithmus beschreiben kann, um *alle* Elemente einer Menge abzuzählen (daher der Name).

Definition 4.19. *Es seien M, N zwei Mengen. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt **Folge**, falls M abzählbar ist.*

Oft schreibt man f_n (oder, noch häufiger, aus historischen Gründen: x_n) statt $f(n)$, und für die gesamte Folge (bzw. Funktion) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ oder $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Will man auch die Zielmenge erläutern, so verwendet man herkömmlich die Schreibweise

$$(x_n)_{n\in M} \subset N.$$

Da eine abzählbare Menge nach Definition dem $\mathbb{N}$ bijektiv ist, werden wir fast immer o.B.d.A. $\mathbb{N}$ als Indexmenge einer Folge betrachten.

Anmerkung 4.20. Es sei X ein normierter Raum und betrachte eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Da die Folge einfach eine Funktion ist, ist sie definitionsgemäß *beschränkt*, falls $M \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass $\|x_n\| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei G eine halbgeordnete Menge und betrachte eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$. Dann ist definitionsgemäß die Folge *monoton wachsend* (bzw. *fallend)*, falls $x_n \le x_{n+1}$ (bzw. $x_{n+1} \le x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie ist *streng* monoton wachsend (bzw. *streng* monoton fallend), falls $x_n < x_{n+1}$ (bzw. $x_{n+1} > x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Besonders wichtig sind für uns die Folgen mit Werten in einem normierten Raum. Folgen mit Werten in einer Mengen von Zahlen, etwa $\mathbb{R}$, werden *numerische Folgen* genannt.

Beispiel 4.21. Bezeichne mit x_n die höchste Temperatur, die am n. Mai 2012 in Ulm gemessen wurde, wenn $n \le 31$, oder $x_n = 0$ sonst. Dann definiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. □

konstfolge Beispiel 4.22. Es sei F eine Menge und $y \in F$. Es sei $x_n := y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. So definiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ eine *konstante Folge*. □

nbeschfolge Beispiel 4.23. Es sei $x_n := (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. So definiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge, die nicht monoton ist (weder fallend noch wachsend). Die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls unbeschränkt, aber monoton wachsend. □

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $x_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, definiert wird, d.h.

$$x_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

ist beschränkt aber nicht monoton (weder fallend noch wachsend). *Strebt sie gegen eine Zahl?* Z.B. gegen 1 oder gegen -1? Oder vielleicht gegen ihren Mittelwert 0, wie manche mittelalterliche Mathematiker dachten? Dies kann formell mittels des modernen Begriffs von Konvergenz untersucht werden.

konverfolge Definition 4.24. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$. Es sei $x \in X$. Dann sagt man, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***gegen x konvergiert****, falls*

$$\forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \exists N_m \in \mathbb{N} \quad \textit{s.d.} \quad \|x_n - x\| \le \frac{1}{m} \ \ \forall n \ge N_m.$$

In diesem Fall schreibt man $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, und x heißt ***Grenzwert*** *der Folge. Gibt es ein $x \in X$, so dass die Folge gegen x konvergiert, so heißt sie* ***konvergent****. Ist der Grenzwert $x = 0$, so heißt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine* ***Nullfolge****.*

Anmerkung 4.25. (1) Es folgt aus obiger Definition, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen x konvergiert, wenn die Folge $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(2) Auch folgt es unmittelbar aus der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$, dass eine äquivalente Definition der Konvergenz einer Folge gegen x lautet:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{s.d.} \quad x_n \in U_\varepsilon(x) \ \ \forall n \ge N_\varepsilon.$$

Auch folgt aus der Dichtheit von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dass es keine Rolle spielt, ob wir eine Ungleichung

$$\|x_n - x\| < \frac{1}{m} \qquad \text{oder doch} \qquad \|x_n - x\| \le \frac{1}{m}$$

fordern.

ÜBUNGSAUFGABE 4.26. Begründe genauer die Aussage in der obigen Anmerkung.

Wie man der Definition entnehmen kann, spielen in der Tat bei Konvergenz nur „spätere Glieder“ eine Rolle. Genauer gilt der folgende

nurunendl

SATZ 4.27. *Es sei X ein normierter Raum. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine gegen x konvergente Folge. Es sei $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ und man betrachte eine beliebige neue Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $x_n = \tilde{x}_n$ für alle $n \geq \tilde{N}$. Dann konvergiert auch $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.*

BEWEIS. Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nach Voraussetzung gibt es $N_m \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| \leq \frac{1}{m}$ für alle $n \geq N_m$. Es sei nun $\tilde{N}_m := \max\{N_m, \tilde{N}\}$. Dann ist $|\tilde{x}_n - x| = |x_n - x| \leq \frac{1}{m}$ für alle $n \geq \tilde{N}_m$. □

BEISPIEL 4.28. Es sei X ein normierter Raum und $x \in X$. Betrachte die Folge mit kostantem Wert x, d.h., die Folge, die durch $x_n := x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert wird. Dann ist sie offensichtlich gegen x konvergent, da $x_n - x \equiv 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit ist $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchy-Folge.

Betrachte die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subset \mathbb{R}$: Sie konvergiert gegen $x = 0$. Es sei nämlich $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist für $N_m = m$

$$|x_n - x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \qquad \text{für alle } n \geq N_m.$$

Die Glieder der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ werden also beliebig klein, wenn man n groß genug wählt. □

konverprod

ÜBUNGSAUFGABE 4.29. Wir verwenden für ein beliebiges Element von $\mathbb{R}^d$ die Schreibweise

$$x = (x^1, \dots, x^d).$$

Somit ist das allgemeine Folgenglied einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ ein Vektor der Form

$$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d).$$

Zeige, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ genau dann gegen $x \in \mathbb{R}^d$ konvergiert, falls jede Koordinatenfolge $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegen x^k konvergiert, für alle $k = 1, \dots, d$ (warum?)

ÜBUNGSAUFGABE 4.30. Konvergiert die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$? Und die Folge $(\frac{1}{n}, n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$?

Im Allgemeinen ist es schwierig, einen Kandidaten für den Grenzwert zu finden. Im Kapitel 5 (kap:cauchy) werden wir sehen, wie man dieses Problem in vielen Fällen elegant meiden kann. Die Grundlage dazu bieten die nächste Definition und den nächsten Satz.

DEFINITION 4.31. *Es sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt **Cauchy-Folge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, für das*

$$\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \qquad \textit{für alle } n \geq m \geq N_\varepsilon.$$

Drei fundamentale Eigenschaften konvergenter Reihen sind im Folgendem gesammelt.

eindeut

SATZ 4.32. *Es seien X ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Folge.*
(1) Es gibt genau einen Grenzwert.
(2) Die Folge ist beschränkt.
(3) Die Folge ist Cauchy.

BEWEIS. Man bezeichnet mit x einen Grenzwert der Folge.

(1) Betrachte einen weiteren Grenzwert y und bezeichne $M := \|x - y\| > 0$. Es sei nun $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $\frac{1}{m} \leq \frac{M}{3}$. Dann gibt es nach Definition von Konvergenz ein $N_{\frac{M}{3}}$, so dass

$$\|x_n - x\| \leq \frac{M}{3} \quad \text{sowie} \quad \|x_n - y\| \leq \frac{M}{3} \qquad \text{für alle } n \geq N_{\frac{M}{3}}.$$

Also gilt für alle $n \geq N_{\frac{M}{3}}$ wegen der Dreiecksungleichung

$$M = |x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| \leq \frac{M}{3} + \frac{M}{3} = \frac{2}{3}M,$$

und deshalb $\frac{1}{3}M = 0$. Daher folgt, dass $\|x - y\| = 0$, was aus Definition der Norm liefert, dass $x = y$.

(3) Bezeichne mit x den Grenzwert von x und betrachte ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N_\varepsilon > 0$, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Aussage folgt dann aus der Dreiecksungleichung, da für alle $n \geq m \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

und somit ist der Beweis erbracht. □

Wir haben die Aussage im Satz 4.32.(2) nicht direkt bewiesen. In der Tat ist sie eine unmittelbare Folgerung vom Satz 4.32.(3) und vom Folgenden.

Lemma 4.33. *Es seien X ein normierter Raum. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge, so ist sie beschränkt.*

Beweis. Es sei $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|x_n - x_m\| \leq 1 \qquad \text{für alle } n \geq m \geq N,$$

und insbesondere

$$\|x_n - x_N\| \leq 1 \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

d.h.,

$$\|x_n\| \leq 1 + \|x_N\| \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

Da die Menge $\{|x_m| : m = 1, \ldots, N\}$ endlich ist, hat sie ein Maximum, d.h., es gibt $M > 0$ mit

$$|x_m| \leq M \qquad \text{für alle } m = 1, \ldots, N.$$

Insbesondere folgt, dass

$$\|x_n\| \leq 1 + M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

was den Beweis erbracht. □

Im Beweis vom Lemma 4.33 haben wir das folgende Lemma verwendet.

Lemma 4.34. *Es sei $(M, \leq)$ eine totalgeordnete Menge. Dann gilt für endliche, nichtleere Teilmengen von M ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis. Beide Aussagen werden ähnlich, nach Induktion über $|M|$ bewiesen. Ist $|M| = 1$, so ist das einzige Element freilich sowohl Maximum als auch Minimum.

Habe nun jede m-elementige Teilmenge von M ein Maximum und man betrachte eine Teilmenge N aus M mit $m + 1$ Elementen, etwa

$$N := \{x_1, \ldots, x_{m+1}\}.$$

Wir müssen jetzt nur zeigen, dass N ein Maximum hat. In der Tat hat $N \setminus \{x_{m+1}\}$ m Elemente, und somit auch ein Maximum $\tilde{x}$. Nun, betrachte x_{m+1}: Entweder gilt $\tilde{x} < x_{m+1}$ und somit $x_k < x_{m+1}$ für alle $k = 1, \ldots, m$, oder sonst ist $\tilde{x} > x_{m+1}$ (warum kann nicht $\tilde{x} = x_{m+1}$ gelten?). Im ersten Fall ist x_{m+1} Maximum von M, im zweiten Fall ist $\tilde{x}$ auch Maximum von M. □

Anmerkung 4.35. Somit können wir insbesondere folgern, dass die Folge $x_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (die übrigens beschränkt ist – die Umkehrung vom Satz 4.32.(2) gilt also nicht), keine konvergente Folge definiert. Denn für $\varepsilon = 1$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ gibt es $2N, 2N+1 \geq N$, so dass

$$|x_{2N} - x_{2N+1}| = |1 - (-1)| = 2 > 1.$$

Eine interessantere Anwendung ist die Folgende.

Das größte Problem mit der Definition 4.24 ist, dass es im Allgemeinen nicht schwierig ist, die Konvergenz gegen ein gewisses x zu überprüfen – *vorausgesetzt*, man weiß überhaupt, welches $x \in X$ ein Grenzwert sein könnte. Eine wichtige Ausnahme wird im Folgenden erwähnt.

rmonotfolge Lemma 4.36. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte, monotone Folge. Dann ist die Folge gegen*

- $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *falls die Folge wachsend ist, bzw. gegen*
- $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, *falls die Folge fallend ist.*

konvergent.

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x := \sup\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq x \leq x + \frac{1}{m},$$

wobei die erste Ungleichung gilt, weil x eine obere Schranke der Menge ist, und die zweite, weil $\frac{1}{m}$ stets positiv ist. Aus der Übung 3.19 folgt auch, dass ein $N_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existiert, so dass $x - \frac{1}{m} < x_{N_m}$. Wegen der Monotonie der Folge gilt aber für alle $n \geq N_m$

$$x - \frac{1}{m} < x_{N_m} \leq x_n \leq x \leq x + \frac{1}{m},$$

d.h.

$$-\frac{1}{m} < x_n - x \leq \frac{1}{m},$$

und somit gilt die erste Implikation. Die Umkehrung folgt aus dem Satz 4.32.(2). □

Die möglicherweise berühmteste Anwendung des obigen Satzes ist der folgende

ezahl Satz 4.37. *Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ konvergiert. Der Grenzwert dieser Folge wird mit e bezeichnet.*

Beweis. Man beweist nach Induktion, dass die Folge monoton wachsend und beschränkt ist. Die Aussage wird dann aus Lemma 4.36 folgen.

Sei $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Dank der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

und somit

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

d.h., die Folge ist monoton wachsend.

Um zu zeigen, dass die Folge auch beschränkt ist, beachte, dass $e_1 = 2$, und somit $e_n \geq 2$ für alle $n \geq 1$. Wiederum folgt aus der Binomialformel

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Diese Summanden werden abgeschätzt durch

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Somit

$$e_n \leq 1 + \sum_{k=1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3,$$

aufgrund der Konvergenzaussage in Lemma geomr 4.50. □

zeit.de Anmerkung 4.38. Ob Leonard Euler die Bezeichnung e in Anlehnung an seinen Namen oder im Zusammenhang zur Exponentialfunktion eingeführt hat, ist nicht bekannt. Die Zahl selber ist jedoch bereits 1690 erschienen, in einem Brief von Gottfried Leibniz. Heute ist bekannt, dass die Zahl e in mehreren Bereichen auftaucht: insbesondere wurde sie von Jacob Bernoulli zur Zinseszinskalkulation untersucht.

harmreih Lemma 4.39. *Betrachte die Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *die durch*

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

definiert wird. Diese Folge ist nicht konvergent.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass diese Folge unbeschränkt ist. Freilich gilt

harmab
$$\begin{array}{rcllllllll} s_n & = & 1+\frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) & + & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) & +\ldots+ & \left(\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ & > & 1+\frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) & + & \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) & +\ldots+ & \left(\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ & = & 1+\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & +\ldots+ & \frac{1}{2} \end{array} \tag{4.2}$$

und somit ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, also konvergiert die Folge nicht. □

Anmerkung 4.40. Der obige Beweis wurde bereits vor 600 Jahre von Nicole Oresme geliefert.

Die Divergenz der harmonischen Reihe zeigt insbesondere, dass man eine unendliche Brücke bauen könnte. Es reicht dazu, die Klötze mit einem der harmonischen Reihe entsprechenden Abstand aufeinander zu stapeln. Der gemeinsame Schwerpunkt vom 1. Klotz und 2. Klotz liegt bei $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, der vom 1. Klotz, 2. Klotz und 3. Klotz bei $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, der vom n. Klotz bei $\frac{1}{2}\frac{1}{n}$. Eine solche Brücke mit n Klötzen würde also bereits eine Länge von $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ haben. *Wenn man über unendlich viele gleiche Klötze verfügen könnte* würde man somit eine Brücke der Länge $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$ errichten. □

Anmerkung 4.41. Ist man mit normierten Räumen noch nicht ganz vertraut, so ist das an dieser Stelle kein Problem! Denn der Grenzwert einer konvergenten Folge mit Gliedern aus $\mathbb{R}$ ist ebenfalls eine relle Zahl. Ähnlich ist der Grenzwert einer konvergenten Folge mit Gliedern aus $\mathbb{R}_+$ auch eine positive Zahl. Aber Vorsicht! Sind die Glieder einer konvergenten Folge *rationale* Zahlen, so ist ihr Grenzwert nicht unbedingt eine rationale Zahl. Das liegt selbstverständlich daran, dass $\mathbb{Q}$ kein ordnungsvollständiger Körper ist. Z.B. sind die Zahlen $(1+\frac{1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ rational, doch konvergiert die dadurch definierte Folge gegen eine irrationale Zahl, vgl. Satz ezahl 4.37.

prodnull Satz 4.42. *Es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *zwei beschränkte Folgen. So ist die* Produktfolge $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge. Ist mindestens eine der Beiden sogar eine Nullfolge, so ist die Produktfolge auch eine Nullfolge.*

Beweis. (1) Es gibt nach Voraussetzung $M_1, M_2 \geq 0$, so dass $|x_n| \leq M_1$ und $|y_n| \leq M_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt aufgrund der Multiplikativität der Norm

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq M_1 M_2,$$

d.h., die Produktfolge ist durch $M_1 \cdot M_2 > 0$ beschränkt.

(2) Es sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und betrachte eine natürliche Zahl $\tilde{m} \geq mM_2$. Dann gibt es ein $N_{\tilde{m}}$, so dass $|x_n| \leq \frac{1}{\tilde{m}}$ für alle $n \geq N_{\tilde{m}}$. Also gilt für alle $n \geq N_{\tilde{m}}$

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq \frac{M_2}{\tilde{m}} \leq \frac{1}{m},$$

also ist $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

rrf Satz 4.43. *Gegeben seien zwei Folgen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, welche gegen x bzw. y konvergieren. Dann gelten die folgenden Rechenregeln.*

(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.
(2) Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$.
(3) Ist $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und auch $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, so ist die Folge $(\frac{1}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$.

Beweis. (1) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N^1, N^2 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und $|y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N^1$ bzw. $n \geq N^2$. Setze $N_\varepsilon := \max\{N^1, N^2\}$. Dann gilt

$$|x_n + y_n - x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Es reicht zu zeigen, dass

$$(x_n y_n - xy)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n - x y_n + x y_n - xy)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n - x)y_n + x(y_n - y))_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Nullfolge ist. Man beachte, dass $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung bzw. laut Satz eindeut 4.32.(2) eine Nullfolge bzw. eine beschränkte Folge sind, also ist dank Satz prodnull 4.42 ihr Produkt eine Nullfolge. Aus dem selben Grund ist $(x(y_n - y))_{n\in\mathbb{N}}$ und somit auch ihre Summe $((x_n - x)y_n + x(y_n - y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Das vollendet den Beweis. □

Übungsaufgabe 4.44. Beweise den Satz rrf 4.43.(3).

Anmerkung 4.45. Insbesondere folgt aus dem Satz rrf 4.43: Ist $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und auch $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, so ist die Folge $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.

Beachte auch, dass die Aussage im Satz rrf 4.43.(1) auch gilt (mit dem selben Beweis) für Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$.

Die Aussage in der folgenden Übungsaufgabe wird oft *Sandwichsatz* oder *Satz der Polizisten* genannt.

polizisten Satz 4.46. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zwei konvergente Folgen mit gleichem Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine dritte Folge, so dass es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \geq \tilde{N}$. Dann konvergiert auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.*

Übungsaufgabe 4.47. Beweise den Sandwichsatz.

geomfol Übungsaufgabe 4.48. Folgere aus den Rechenregeln oder aus dem Sandwichsatz, dass

- $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$, und
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.

Anmerkung 4.49. Es sei X ein normierter Raum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Aussage, die dem Satz 4.43.(2) entspricht, ist:

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ und jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

geomr Lemma 4.50. *Es sei $q \in \mathbb{R}$. Betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei*

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} q^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert diese Folge gegen $\frac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$, und divergiert sonst.

Beweis. Es gilt nämlich

$$x_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

wie man direkt nachprüfen kann. Also ist nach Satz 4.43

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

weil laut Übungsaufgabe 4.48 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt. Dass die Folge sonst divergiert sieht man dadurch, dass sie für $|q| \geq 1$ unbeschränkt ist. ☐

Der erste Beweis der Konvergenz dieser Folge wurde vor über 600 Jahre erbracht und geht auf Richard Suiseht zurück.

Übungsaufgabe 4.51. Zeige sowohl durch direkten Nachweis (entsprechend der Definition), als auch durch Ausnutzung der Rechenregeln für Grenzwerte, dass die folgende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren:

- $x_n := \frac{n^2+n+1}{n^3+n^2+n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;
- $x_n := \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$;
- $x_n := \frac{3n^2-4n+1}{4n^2+5n-17}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben gesehen, dass die Gleichung

$$x^2 = 2$$

in $\mathbb{R}$ – anders in $\mathbb{Q}$ – sich lösen lässt. Diese Beobachtung kann stark verallgemeinert werden.

nwurzel Satz 4.52. *Sind $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so hat die Gleichung*

zel-defieq (4.3)
$$x^n = \alpha$$

eine einzige positive Lösung $x \in \mathbb{R}$. Diese Lösung findet man als Grenzwert der rekursiv definierten Folge

nwurzeleq (4.4)
$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{\alpha}{x_n^{k-1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

wobei x_0 eine beliebige positive reelle Zahl ist.

Diese Lösung heißt dann **n-te positive Wurzel von** α und wird mit

$$\sqrt[n]{\alpha} \qquad \text{oder} \qquad \alpha^{\frac{1}{n}}$$

bezeichnet.

Somit können wir für $\alpha \geq 0$ auch die Schreibweise

$$\alpha^{\frac{n}{m}}$$

einführen, für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beweis. Der Beweis besteht aus mehreren Schritten. Wir beachten zuerst, dass falls $x_n > 0$ ist auch $x_{n+1} > 0$, und somit ist induktiv bewiesen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$.

1) Die Eindeutigkeit der positiven Wurzel folgt daraus, dass (dank Übungsaufgabe 3.12.(3)) $0 \le z < w$ impliziert $z^k < w^k$.

2) Wir zeigen jetzt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, in dem wir zeigen, dass sie monoton fallend ist (seine Beschränktheit ist ja schon bekannt). Schreibe

$$x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{x_n^k} - 1\right)\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Wir wollen aus dieser Ungleichung folgern, dass die Folgen monoton fallend ist, d.h., dass $\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{x_n^k} - 1\right)\right) \le 1$. Folgere dazu aus der Bernoullischen Ungleichung (an (4.4) angewandt), dass

$$x_{n+1}^k = x_n^k \left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{x_n^k} - 1\right)\right)^k \ge x_n^k \left(1 + \left(\frac{\alpha}{x_n^k} - 1\right)\right) = \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt $\frac{\alpha}{x_m^k} \le 1$ für alle $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, d.h

$$\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{x_m^k} - 1\right) \le 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Aus (4.52) und (4.4) folgt, dass

$$x_{n+1} \le x_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und somit ist die Folge monoton fallend.

3) Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ monoton fallend ist, konvergiert es gegen sein Infimum, etwa $x \ge 0$. Man soll nur noch zeigen, dass x tatsächlich (4.3) erfüllt. Multipliziere beide Seiten von (4.4) mit kx_n^{k-1}. Dann gilt

$$kx_n^{k-1}x_{n+1} = (k-1)x_n^k + \alpha,$$

und somit dank der Rechenregeln für Folgen

$$\begin{aligned} kx^k &= k\lim_{n\to\infty} x_n^{k-1} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} kx_n^{k-1}x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (k-1)x_n^k + \alpha \\ &= (k-1)\lim_{n\to\infty} x_n^k + \alpha \\ &= (k-1)x^k + \alpha, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Im Beispiel 4.23 haben wir den Fall zweier Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gesehen, welche unbeschränkt sind – und somit notwendigerweise gegen keine reelle Zahl konvergieren. Doch oszillieren die Werte der ersten Folge ständig und zwar mit immer größeren Sprüngen, während die zweite Folge regelmäßig wächst. Wir möchten diese beide Verhaltensweisen unterscheiden: dazu betrachten wir die Folgende.

Definition 4.53. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Die Folge heißt **uneigentlich gegen $+\infty$ konvergent**, bzw. **uneigentlich gegen $-\infty$ konvergent**, falls*

$$\forall M \in \mathbb{N}\ \exists N_M \in \mathbb{N}\ s.d.\ x_n \ge M \ \ \forall n \ge N_M,$$

bzw.

$$\forall M \in \mathbb{N}\ \exists N_M \in \mathbb{N}\ s.d.\ x_n \le -M \ \ \forall n \ge N_M.$$

Übungsaufgabe 4.54. Wie kann man die Aussage des Satzes 4.46 so umformulieren, dass er auch für uneigentlich konvergente Folgen gilt?

eigenbesch ANMERKUNG 4.55. Nach Definition ist jede uneigentlich konvergente Folge auch unbeschränkt. Bitte beachte, dass der Begriff von uneigentlicher Konvergenz nur definiert ist, wenn eine Totalordnung vorhanden ist. Deshalb schränken wir uns auf $\mathbb{R}$ ein.

BEISPIEL 4.56. Ein Beispiel einer uneigentlich konvergenten Folge kennen wir schon: das ist die Folge im Lemma 4.39. Jene Folge ist monoton wachsend und unbeschränkt und konvergiert somit uneigentlich gegen $+\infty$.

DEFINITION 4.57. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche weder gegen ein $x \in \mathbb{R}$ noch uneigentlich gegen $+\infty$ oder $-\infty$ konvergiert. Dann heißt die Folge **divergent**.*

Betrachte eine monotone Folge reeller Zahlen. Wir wissen schon, dass genau dann die Folge konvergent ist, wenn sie beschränkt ist: in diesem Fall stimmt ihr Grenzwert mit dem Supremum (bzw. Infimum) der Menge $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ überein. Für unbeschränkte Folge kann man ein ähnliches Kriterium formulieren.

gentl-monot SATZ 4.58. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Gliedern aus $\mathbb{R}$. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (bzw. fallend). Genau dann ist die Folge unbeschränkt, wenn sie gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) uneigentlich konvergiert.*

BEWEIS. Es sei o.B.d.A. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und monoton *wachsend* – sonst betrachte $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Definition ist die Menge $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben unbeschränkt, also gibt es für alle $M \in \mathbb{N}$ ein $N_M \in \mathbb{N}$, so dass $x_{N_M} \geq M$. Wegen der Monotonie der Folge gilt aber auch $x_n \geq M$ für alle $n \geq N_M$.

Die Umkehrung folgt aus der Anmerkung 4.55. $\square$

Wir listen einige Rechenregeln für uneigentliche konvergente Folgen auf.

rechen2 SATZ 4.59. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $x_n, y_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$.*

- *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (gegen $x \in \mathbb{R}$!) konvergent und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) uneigentlich konvergent. Dann gelten die folgenden Rechenregeln.*
  - *(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergent.*
  - *(2) Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergent, falls* $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$.
  - *(3) Die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist uneigentlich gegen $-\infty$ (bzw. $+\infty$) konvergent, falls* $\lim_{n\to\infty} x_n < 0$.
- *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) uneigentlich konvergente Folgen. Dann konvergiert die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).*
- *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) uneigentlich konvergente Folgen. Dann konvergiert die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $+\infty$.*

ANMERKUNG 4.60. Im Allgemeinen kann man nichts über die Summe zweier uneigentlich gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ konvergenten Folgen sagen: z.B. ist

$$\lim_{n\to\infty}(n-n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(2n-n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(n-2n) = -\infty.$$

Ebenfalls gibt es keine Regel über das Verhalten des Produktes einer Nullfolge und einer uneigentlich konvergenten Folge: z.B. ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}n\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}n^2\right) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{-n}n^2\right) = -\infty.$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.61. Beweise den Satz 4.59.

ÜBUNGSAUFGABE 4.62. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Definiere eine neue Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\tilde{x}_n := \begin{cases} x_{n-100}, & \text{wenn } n \geq 101, \\ x_n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.63. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} := \left(\frac{n^2}{n^2+2n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

(1) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

(2) Zu $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, und $\varepsilon = 10^{-6}$ bestimme das kleinste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

Übungsaufgabe 4.64. Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) $x_n := \frac{n}{n+1}$;
(2) $x_n := \frac{n^2}{2^n}$;
(3) $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Hinweise: Zu (2): benutze Übungsaufgabe 2nn2 *1.72. Zu (3): erweitere den Bruch* $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}$ *mit* $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

Manchmal ist es nicht nur interessant zu wissen, ob eine Folge uneigentlich konvergiert, sondern auch, *wie schnell* sie das tut. Das ist bei der Untersuchung informationstheoretischer Algorithmen oder der Komplexitätstheorie oft der Fall. Eine solche Konvergenzgeschwindigkeit (auch „asymptotisches Verhalten" genannt) wird üblicherweise durch die sogenannte *Landau-Symbole* gemessen, die 1894 von Paul Gustav Heinrich Bachmann und 1909 von Lev Davidovich Landau eingeführt wurden.

landau Definition 4.65. *Es seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann sagt man, dass* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***von Ordnung*** b_n ***ist*** *und schreibt* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = O((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *(oder manchmal einfacher* $a_n = O(b_n)$*), wenn die Folge* $(|\frac{a_n}{b_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist. Auch schreibt man* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in o(b_n)$, *wenn* $(|\frac{a_n}{b_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge ist.*

Übungsaufgabe 4.66. a) Zeige: Zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann, wenn $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

b) Es sei $q \in (0,1)$. Zeige: Wenn $0 < x_n$ und $x_{n+1} \leq q x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

KAPITEL 5

Häufungspunkte und Cauchy-Folgen

kap:cauchy

Eng verwandt mit dem Begriff von Grenzwert ist der Folgende.

Definition 5.1. *Es sei X ein normierter Raum. Ein Vektor $x \in X$ heißt* ***Häufungspunkt*** *einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ es unendlich viele Folgenglieder gibt, die in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ liegen.*

1hpnokonv

Anmerkung 5.2. Salopp ausgedruckt: eine Folge ist gegen x konvergent, wenn ihre Glieder beliebig nah an x kommen, und schließlich (d.h. für größere Indizes) auch dort *bleiben*; während x ein Häufungspunkt ist, wenn die Folgenglieder beliebig nah an x kommen, und sie das immer wieder tun. D.h., falls x ein Grenzwert ist, müssen in einer beliebig kleinen ε-Umgebung von x nicht nur unendlich viele, sondern schließlich *alle* Folgenglieder liegen. Somit ist jeder Grenzwert ein Häufungspunkt, aber nicht umgekehrt. Insbesondere hat eine konvergente Folge notwendigerweise nur einen Häufungspunkt.

Wiederum muss eine Folge, die nur einen Häufungspunkt hat, nicht notwendigerweise konvergieren: betrachte z.B. die Folge

$$x_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

Man kann überprüfen, dass 0 der einzige Häufungspunkt ist (warum?). Doch ist die Folge unbeschränkt und somit sicherlich nicht konvergent.

Definition 5.3. *Es seien F eine Menge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine weitere, streng monoton wachsende Folge. Dann ist die Verkettung dieser beiden Abbildungen, d.h.,*

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto x(n(k)) = x_{n_k} \in F$$

eine neue Folge, die ***Teilfolge*** *von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt und durch*

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

bezeichnet wird.

Beispiel 5.4. Es gibt offensichtlich unedlich viele Teilfolgen einer Folge. Z.B. hat die Folge, die in der Übungsaufgabe 1hpnokonv 5.2 eingeführt wurde, u.A. die Teilfolgen der geraden und ungeraden Glieder, die jeweils durch

$$x_{2n} := 0 \qquad \text{und} \qquad x_{2n+1} := n$$

definiert werden. Man sieht, dass die erstere Teilfolge konvergent ist. Das ist kein Zufall, wie die Aussage in der nächsten Übungsaufgabe besagt.

jedeteilf

Lemma 5.5. *Es sei X ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Folge. Dann ist jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ eine konvergente Folge.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Da man N_ε findet, so dass die Konvergenzbedingung erfüllt ist, und da die Abbildung $k \mapsto n_k$ streng monoton wachsend ist, gilt um so mehr für alle $n_k \geq k \geq N_\varepsilon$, dass $x_{n_k} \in U_\varepsilon(x)$, wobei x der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. $\square$

haufteilf

Lemma 5.6. *Es sei X ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Dann ist $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, wenn es eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.*

Beweis. Es sei x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Definiere rekursiv eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} n_0 &:= 0 \quad \text{und} \\ n_k &:= \min\{m \in \mathbb{N} : m > n_{k-1} \text{ mit } x_m \in U_{\frac{1}{k}}(x), \qquad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Wohlordnung von $\mathbb{N}$, vgl. die Übungsaufgabe 1.53, ist n_k dadurch wohl definiert. Dies zeigt, dass

$$\psi : \mathbb{N} \ni k \to n_k \in \mathbb{N}$$

eine wohl definierte und streng monoton wachsende Folge ist. Es reicht zu zeigen, dass die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Dazu, sei es $\varepsilon > 0$ und betrachte $K_\varepsilon \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $1/k < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Dann gilt

$$x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(x) \subset U_\varepsilon(x) \qquad \forall k \geq K,$$

und somit $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Es sei umgekehrt $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert. Somit ist x ein Häufungspunkt von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und somit auch von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Betrachte die Folgen $(x_n^\uparrow)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(x_n^\downarrow)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, die durch

$$\begin{aligned} x_n^\uparrow &:= \sup\{x_k : k \geq n\} \quad \text{und} \\ x_n^\downarrow &:= \inf\{x_k : k \geq n\} \end{aligned}$$

definiert werden. Diese Folgen konvergieren (im normalen oder eigentlichen Sinne), da sie monoton (fallend bzw. wachsend) sind.

Definition 5.7. *Die (möglicherweise uneigentlichen) Grenzwerte der Folge $(x_n^\uparrow)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (bzw. $(x_n^\downarrow)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$) heißt* ***limes superior*** *(bzw.,* ***limes inferior****) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Grenzwerte bezeichnet man durch*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} x_n^\uparrow \qquad (\textit{bzw. } \liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} x_n^\downarrow).$$

Während die Definition 5.7 möglicherweise verwirrend klingt, verfügt man zum Glück über eine einfachere Charakterisierung.

Lemma 5.8. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dann hat die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sowohl ein Maximum $x^\uparrow$ als auch ein Minimum $x^\downarrow$ in $\overline{\mathbb{R}}$, welche mit $\limsup_{n\to\infty} x_n$ bzw. $\liminf_{n\to\infty} x_n$ übereinstimmen.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass $x^\uparrow = \limsup_{n\to\infty} x_n$. Der andere Beweis ist ähnlich.

Definitionsgemäß gilt $\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n^\uparrow$. Nun betrachten wir die drei möglichen Fälle: $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

- Ist $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty$, so gibt es für alle $M > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

  $$-M > x_n^\uparrow, \qquad \text{d.h.,} \qquad x_k \in (-\infty, -M),$$

  (da sonst gelte auch

  $$-M^* > \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

  für ein $M^* > 0$ – ein Widerspruch zu unserer Annahme). Das zeigt, dass keine relle Zahl ein Häufungspunkt der Folge sein kann, d.h., $-\infty$ ist der einzige Häufungspunkt.
- Ist $\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n^\uparrow \in \mathbb{R}$, so gibt es nach Lemma 3.19 für alle $y > \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n^\uparrow$ ein $n \in \mathbb{N}$, für das

  $$y > x_n^\uparrow \geq x_k \qquad \text{für alle } k \geq n.$$

  D.h., für $\varepsilon := y - x_n^\uparrow$ gilt

  $$x_k \notin U_\varepsilon(y) \qquad \text{für alle } k \geq n,$$

  und insbesondere kann $x_k \in U_\varepsilon(y)$ für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$ gelten – anders gesagt ist y kein Häufungspunkt.

Somit kann kein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt größer als $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sein. Es reicht nun zu zeigen, dass $\limsup_{n\to\infty} x_n$ tatsächlich ein Häufungspunkt ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt definitionsgemäß

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n^\uparrow \le x_k^\uparrow = \sup\{x_h : h \ge k\} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Somit gibt es nach Lemma supchar 3.19 für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \ge k$, so dass

$$x_{n_k} \ge \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n^\uparrow - \varepsilon = \limsup_{n\to\infty} x_n - \varepsilon.$$

Andererseits können höchstens endlich viele Glieder der Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ größer als $\limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ sein. Mustern wir diese endlich viele (Teil)Folgenglieder aus, so erhalten wir $(x_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}} \subset U_\varepsilon(\limsup_{n\to\infty} x_n)$. Nach Lemma haufteilf 5.6 ist $\limsup_{n\to\infty} x_n$ ein Häufungspunkt.

- Ist schließlich $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$, so ist $x_n^\uparrow = \sup\{x_k : k \ge n\} = +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, für alle $M > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge n$ so, dass $x_k \ge N$. Das bedeutet gerade, dass $+\infty$ ein Häufungspunkt ist – und dann notwendigerweise der Größte.

Damit ist der Beweis vollständig. □

Der Folgende ist der **Satz von Bolzano–Weierstraß**, der zum ersten Mal 1817 von Bernard Bolzano bewiesen wurde.

bolzwei

Satz 5.9. *Es sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann hat jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nach Induktion über d.

Bechtrachte eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Da sie beschränkt ist, ist $\limsup_{n\to\infty} x_n$ eine reelle Zahl (also $\neq \pm\infty$). Somit hat sie laut Lemma limsupinfhp 5.8 sicherlich (mindestens) einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ (d.h., $\neq \pm\infty$), der wiederum laut Lemma haufteilf 5.6 auch der Grenzwert einer Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein muss. Dies vollendet der Beweis.

Gelte nun die Aussage für d und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ beschränkt. Betrachte die Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ und $(x_n^{d+1})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, wobei

$$y_n := (x_n^1, \dots, x_n^d)$$

und für alle $k = 1, \dots, d+1$ x^k die k-te Koordinate von x ist. Es folgt nun aus

$$|x^k| \le \sqrt{\sum_{h=1}^{d} |x_h|^2} \le \sqrt{\sum_{h=1}^{d+1} |x_h|^2} \le \|x\| \qquad \text{für alle } k = 1, \dots, d+1,$$

dass beide Folgen beschränkt sind, und somit nach Induktionsvoraussetzung eine konvergente Teilfolge haben. Unser Ziel ist jetzt, daraus eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu basteln. Betrachte also erst die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$, und es sei $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ eine konvergente Teilfolge. Betrachte nun die Teilfolge $(x_{n_k}^{d+1})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ von $(x_n^{d+1})_{n\in\mathbb{N}}$, die mit der selben selbe streng monoton wachsende Funktion

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$$

assoziiert ist. Diese Teilfolge ist auch beschränkt, und hat somit eine konvergente Teilfolge – etwa $(x_{n_{k_h}}^{d+1})_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Aber auch die Teilfolge $(y_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}}$ der konvergenten Folge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, laut Lemma jedeteilf 5.5, konvergent. Somit sind sowohl $(x_{n_{k_h}}^{d+1})_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ als auch $(y_{n_{k_h}})_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ konvergent. Die Aussage folgt dank einer Anwendung der Übungsaufgabe konverprod 4.29. □

Der Begriff einer Cauchy-Folge hat sich in dem letzten Jahrhundert als einer der weitreichendsten Konzepte der Analysis erwiesen. Diesem Kapitel ist dazu gewidmet. Der Startpunkt ist der Folgende.

Cauchy

Satz 5.10. *Genau dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent, wenn sie Cauchy ist.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir ein wenig Vorbereitung.

Wir haben gesehen, dass der Begriff von Cauchy-Folge i.A. schwächer ist, als der Begriff von konvergenten Folge. Das liegt aber *nicht* daran, dass eine Cauchy-Folge zu viele Häufungspunkte besitzen kann, wie das Folgende zeigt.

Lemma 5.11. *Es sei X ein normierter Raum. Hat eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Teilfolge, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selber bereits konvergent.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge in einem normierten Raum. Es sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ konvergente Teilfolge. Wir wollen jetzt zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Betrachte $\varepsilon > 0$ und finde $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq m \geq N_\varepsilon.$$

Es sei nun $\tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|x_{n_k} - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } k \geq \tilde{N}_\varepsilon,$$

Da $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt auch

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{für alle } k \geq \max\{N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\}$$

und somit ist die Aussage vollständig bewiesen. □

Beweis vom Satz 5.10. Die erste Implikation wurde im Satz 4.32.(3) bewiesen. Es sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge. Laut dem Lemma 4.33 muss sie beschränkt sein, was nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß impliziert, dass sie einen Häufungspunkt hat. Eine Anwendung des Lemma 5.11 vervollständigt nun den Beweis. □

Anmerkung 5.12. Das obige Kriterium besagt, dass eine Folge genau dann konvergent ist, wenn es einen Index gibt, so dass *alle* folgenden Folgenglieder nah beieinander sind. Vorsicht! Es reicht dazu nicht, dass nur die Folgenglieder x_n, x_{n+1} für große n beliebig nah aneinander liegen, wie das Beispiel der Folge im Lemma 4.39 zeigt.

Definition 5.13. *Es sei X ein normierter Raum. Ist jede Cauchy-Folge mit Werten in X bereits konvergent, so heißt X ein* ***Banachraum****.*

Eine unmittelbare Folgerung des Lemma 5.11 ist die Folgende.

Korollar 5.14. *Es seien X ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Folge – etwa gegen $x \in X$. Dann ist notwendigerweise x auch der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Somit besagt der Satz 5.10, dass $\mathbb{R}$ ein Banachraum. In der Tat gibt es viel mehr Banachräume.

Lemma 5.15. *Es sei $d \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{R}^d$ bzgl. der beiden Normen, die im Beispiel 4.6 eingeführt wurden, ein Banachraum.*

Beweis. Aufgrund von der Aussage in der Übungsaufgabe 4.29 können wir uns auf den Fall $d = 1$ einschränken (warum?). Dass aber die Aussage im Fall $d = 1$ gilt, besagt der Satz 5.10. □

5.1. Der Körper $\mathbb{C}$

Wir haben gesehen, dass die Gleichung

$$x^2 = 2$$

in $\mathbb{R}$ sich lösen lässt. Und die Gleichung

$$x^2 + 2 = 0 \quad ?$$

Dass diese Gleichung eine reelle Lösung besitzt, ist verboten von der Tatsache, dass $\mathbb{R}$ nach Konstruktion ordnungsvollständig ist, und von der Aussage in der Übungsaufgabe 3.12.(5). Dies schien den Mathematikern im 18. Jahrhundert eine unnötige Einschränkung zu sein, so unnötig wie früher die Unlösbarkeit

$$x + 2 = 0$$

in $\mathbb{N}$. Um diese Lücke zu schließen hat man die komplexen Zahlen eingeführt.

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wurde also dadurch eingeführt, dass man annimmt, die Gleichung

x2i

$$x^2 = -1 \tag{5.1}$$

habe eine Lösung, die man mit i bezeichnet. Genauer gilt der Folgende.

nplexkonstr

Theorem 5.16. *Es gibt einen Körper, den man mit* $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ *bezeichnet, in dem die Gleichung* 5.1 *eine Lösung hat. Dieser Körper enthält eine* isomorphe Kopie *von* $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir wollen $\mathbb{C}$ konstruieren, indem wir auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ eine spezielle Multiplikation einführen. Die Addition bleibt also wie gehabt durch

$$(x, y) + (w, z) := (x + w, y + z)$$

definiert, aber man setzt auch

ultiplkompl

$$(x, y) \cdot (w, z) := (xw - yz, xz + wy). \tag{5.2}$$

Man identifiziert $x \in \mathbb{R}$ mit dem Vektor $(x, 0) \in \mathbb{C}$: Tatsächlich definiert dieses einen injektiven Homomorphismus, wie man leicht sieht. Insbesondere folgt aus (5.3), dass

plkompl-ima

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1. \tag{5.3}$$

Mit diesen beiden Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper: $0_{\mathbb{C}} := (0, 0)$ ist das neutrale Element für $+$, $1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$ das neutrale Element für die Multiplikation, $-(x, y) := (-x, -y)$ die Inverse von (x, y) bzgl. $+$, und

$$(x, y)^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

die Inverse bzgl. $\cdot$. □

Anmerkung 5.17. 1) Man kann zeigen, dass der oben konstruierter Körper der (bis auf Isomorphismus) kleinste ist, in dem die Gleichung 5.1 eine Lösung hat und der eine *isomorphe Kopie* von $\mathbb{R}$ enthält.

2) Aufgrund der Identifikation von $\mathbb{R}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$, werden wir nicht mehr

$$(x, 0) \qquad \text{oder} \qquad (0, iy)$$

schreiben, sondern nur

$$x \qquad \text{bzw.} \qquad iy.$$

Vorsicht: $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ kann als Teilmenge von $\mathbb{C}$ angesehen werden, $\mathbb{R}$ ist aber kein Unterraum von $\mathbb{C}$ (da z.B. für $\lambda := i \in \mathbb{C}$ liegt für $x := 1 \in \mathbb{R}$ das Vektorprodukt λx nicht in $\mathbb{R}$).

3) Damit man die Additions- und Multiplikationsregeln leichter merken kann (quasi als Eselsbrücke), hat man eine nützliche Schreibweise eingeführt, nämlich

$$x + iy := (x, y).$$

Mit dieser Schreibweise und angesichts von (5.3) sieht man tatsächlich, dass

$$i^2 = i \cdot i = (-1, 0) \equiv -1.$$

Diese Schreibweise werden wir immer verwenden, wenn wir nicht eine andere, die wir gleich im nächsten Punkt sehen werden, bevorzugen.

4) Da $\mathbb{C}$ für viele Zwecke mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden kann, bietet sich an, jede komplexe Zahl mittels zweier Koordinaten zu identifizieren. Eine Möglichkeit besteht aus den kartesischen Koordinate Re und Im. Eine andere werden wir in der Anmerkung 6.58 sehen.

5) Beachte, dass $\mathbb{R}^2$ nur ein Vektorraum ist und kein Körper: ein Vektorprodukt (d.h., eine Multiplikation $\mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) ist gar nicht definiert. In der Tat ist $\mathbb{C}$ ein *unitärer Raum* bzw. *Prähilbertraum* im Sinne der linearen Algebra, doch ist nicht $(x, y) \mapsto xy$ das zugehörige Skalarprodukt, sondern $(x, y) \mapsto x\overline{y}$.

Definition 5.18. *Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen* ***komplexe Zahlen****. Jedes Element aus $i\mathbb{R} := \{(x, y) \in \mathbb{C} : x = 0\}$ heißt* ***rein imaginäre Zahl****.*

Definition 5.19. *Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Sein* **Realteil** $\mathrm{Re} z$ *ist x, sein* **Imaginärteil** $\mathrm{Im} z$ *ist y. Seine* **komplex konjugierte Zahl** *ist*

$$\overline{z} := x - iy.$$

Der **Betrag** *von z wird durch*

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

definiert.

Insbesondere sind $\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z, |z|$ reelle Zahlen.

Anmerkung 5.20. 1) Man beachte, die Definition des Betrags einer komplexen Zahl mit (4.1) übereinstimmt, falls die Zahl reell ist. Auch ist für eine reelle Zahl das Imaginärteil 0. Somit ist eine komplexe Zahl genau dann reell, wenn sie mit ihren komplexen Konjugierten übereinstimmt.

2) Auch dieser Betrag definiert (diesmal auf $\mathbb{C}$) eine Norm. In der Tat ist somit die Norm einer komplexen Zahl z gleich, egal ob man sie als komplexe Zahl $\mathrm{Re}\, z + i\,\mathrm{Im}\, z$ oder als Vektor $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ auffasst. Alle Aussagen, die nur auf die Struktur von $\mathbb{R}^2$ als normierter Raum beruhen (wie z.B. Beschränktheit von Mengen oder Konvergenz von Folgen), gelten somit auch für $\mathbb{C}$. Man sagt, dass *die Topologie des $\mathbb{C}^d$ gleich der Topologie von $\mathbb{R}^{2d}$ ist.* Insbesondere liefert der Satz von Bolzano–Weierstraß, dass auch $\mathbb{C}^d$ für alle $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Banachraum ist.

Das zeigt, dass die Einführung von Folgen und, allgemeiner, von Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ keinerlei Schwierigkeit bereitet. Insbesondere gelten alle Konvergenz- und Divergenzkriterien für Folgen, die nur auf die Körperstruktur (aber nicht auf die Ordnungsstruktur) von $\mathbb{R}$ beruhen.

Es ist oft bequem, das Real- und Imaginärteil einer Folge einzuführen.

Definition 5.21. *Es sei E eine Menge. Es sei $f : E \to \mathbb{C}$. Dann sind das* ***Realteil*** *bzw. das* ***Imaginärteil*** *von f die neuen Funktionen, mit Definitionsmenge E und Zielmenge $\mathbb{R}$, die durch*

$$\mathrm{Re}\, f : x \mapsto \mathrm{Re}\, f(x), \qquad x \in E$$

bzw.

$$\mathrm{Im}\, f : x \mapsto \mathrm{Im}\, f(x), \qquad x \in E.$$

definiert sind.

Übungsaufgabe 5.22. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Folgen $(\mathrm{Re}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathrm{Im}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Real- und Imaginärteilen konvergieren.

Anmerkung 5.23. 1) Man soll aber vorsichtiger sein, wenn Funktionen auch komplexe *Argumente* haben. Insbesondere die Eigenschaften der Differentialrechnung solcher Funktionen sind sehr anders von denen der herkömmlichen Funktionen einer *reellen* Variabel: sie sind das Hauptthema der *Funktionentheorie.*

2) Der Grund, warum man wahlweise und alternativ mit $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ arbeitet, ist dass $\mathbb{C}$ sowohl Vor- als auch Nachteile gegenüber $\mathbb{R}$ hat. Eine Gleichung n. Grades hat z.B. stets *komplexe* Lösungen (aber nicht unbedingt *reelle* Lösungen – s. Fundamentalsatz der Algebra), aber $\mathbb{C}$ kann aufgrund der Aussage in der Übungsaufgabe 3.12.(5) kein geordneter Körper sein ($\mathbb{C}$ kann aber wohl lexikographish angeordnet werden).

3) Auch $\overline{i}$ löst die Gleichung $x^2 = -1$, also ist die Wurzel einer Zahl in $\mathbb{C}$ nicht eindeutig. Allgemeiner gilt: für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n komplexe Zahlen $x_1, \dots, x_n$, so dass $x_1^n = \dots = x_n^n = 1$: alle haben notwendigerweise Betrag $=1$ (warum?).

Was noch? Etliche Mathematiker haben versucht, die Konstruktion von Zahlen weiter zu verallgemeinern. 1843 sind somit durch William Hamilton *Quaternionen* (ihre Menge wird durch $\mathbb{H}$ bezeichnet) und durch John T. Graves *Oktonien* ($\mathbb{O}$) eingeführt worden. Quaternionen können als 4-Tupel dargestellt werden, Oktonien sogar als 8-Tupel. Quaternionen spielen aber in der Mathematik eine viel kleinere, Oktonien sogar eine *sehr* viel kleinere Rolle als komplexe Zahlen.

Über 150 Jahre nach ihre Einführung muss man sagen, dass wesentliche Anwendungen (noch?) fehlen, die ihre Untersuchung motivieren könnten. (Quaternionen werden allerdings gelegentlich in der Physik tatsächlich verwendet). Ihre Bedeutung ist also fast nur historisch: eine Wikipedia-Recherche ist aber trotzdem interessant – etwa um zu entdecken, warum man nicht weiter geht, um 2^n-Tupel einzuführen.

5.2. Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Eine interessante Anwendung der Cauchy-Folgen besteht darin, die herkömmliche Darstellung der reellen Zahlen – die wir mit dem Satz reellkonstr 3.28 verabschiedet hatten – wiederzufinden.

Definition 5.24. *Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form*

$$x_n := \pm \sum_{h=-k}^{n} a_h b^{-h}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

*wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $(a_h)_{-k\leq h} \subset [0, b-1]_{\mathbb{N}}$ sind, heißt ein **b-adischer Bruch**.*

Konvergiert die mit einem b-adischem Bruch assoziierte Folge, so verwendet man die Schreibweise

$$\pm a_{-k}a_{-k+1}\ldots a_{-1}a_0, a_1a_2\ldots.$$

Werden die Koeffizienten a_k ab einem Index K periodisch, d.h., gibt es $\ell \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so dass

$$a_K = a_{K+h\ell}, \quad a_{K+1} = a_{K+1+h\ell}, \quad \ldots, a_{K+\ell-1} = a_{K+\ell-1+h\ell} \qquad \text{für alle } h \in \mathbb{N},$$

so schreibt man

$$\pm a_{-k}a_{-k+1}\ldots a_{-1}a_0, a_1a_2\ldots\overline{a_Ka_{K+1}\ldots a_{K+\ell+1}}.$$

Insbesondere spricht man bei $b = 10$ von **Dezimalbrüchen**.

Beispiel 5.25. Der Dezimalbruch mit $k = -1$ und Koeffizienten

$$a_{-1} = 3, \quad a_0 = 5, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 5, \quad \text{und schließlich } a_h = 0 \text{ für alle } h \geq 4$$

konvergiert gegen eine relle Zahl, die wir mit

$$35,275$$

bezeichnen.

Beispiel 5.26. Betrachte die Zahl $0,\overline{9} := 0,99999\ldots$. Damit ist wohl die reelle Zahl gemeint, die als Grenzwert des Approximationsprozesses

$$0,9, \qquad 0,99, \qquad 0,999, \qquad \ldots,$$

erhalten wird, d.h. der Grenzwert der Folge

$$\left(\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, \ldots, 1 - \frac{1}{10^n}, \ldots\right),$$

d.h., von

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}\right) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt offensichtlich

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{10^n} \leq 1,$$

und dank dem Sandwichsatz sieht man, dass $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{10^n}) = 1$. Also ist $0,\overline{9} = 1$. □

Satz 5.27. *Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen eine reelle Zahl.
(2) Jede reelle Zahl ist Grenzwert eines b-adischen Bruchs.

Bitte beachte, dass die Aussage in (2) nur die Existenz, nicht aber die Eindeutigkeit einer solchen b-adischen Entwicklung aussagt.

Beweis. (1) Es reicht zu zeigen, dass jeder b-adische Bruch eine Cauchy-Folge darstellt – und sogar, dass jeder *positive* b-adische Bruch das tut. Es sei also $\varepsilon > 0$. Es folgt aus der Übungsaufgabe 3.35, dass es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit $b^n < \varepsilon$. Betrachte also $n \geq m \geq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \sum_{h=m+1}^{n} a_h b^{-h} \\ &\leq \sum_{h=m+1}^{n} (b-1) b^{-h} \\ &= (b-1) b^{-m-1} \sum_{h=0}^{n-m-1} b^{-h} \\ &< (b-1) b^{-m-1} \frac{1}{1-b^{-1}} \\ &\leq b^{-m} \leq b^{-N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die vorletzte Ungleichung folgt aus der Konvergenz der Folge, die im Lemma 4.50 eingeführt wurde.

(2) Es sei $x \geq 0$. Die archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$ liefert die Existenz eines $m \in \mathbb{N}$ mit $x < b^{m+1}$, also ist die Menge

$$\{m \in \mathbb{N} : x < b^{m+1}\}$$

nichtleer. Da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist, hat diese Menge ein Minimum, etwa k. Somit ist $x < b^{k+1}$ und daher

$$x b^{-k} < b$$

Wir behaupten jetzt, dass es zwei Folgen $(a_h)_{h \geq -k} \subset [0, b-1]_{\mathbb{N}}$ und $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \geq -k$ gilt

- $\xi_n \in [0, b^{-n})$ sowie
- $x = \sum_{h=-k}^{n} a_h b^{-h} + \xi_n$.

Diese Aussage wird nun induktiv bewiesen, d.h., solch eine Folge wird rekursiv konstruiert.

Dass die Aussage für $n = -k$ gilt, würde gleich aus der Übungsaufgabe 3.38 folgen, wenn sie nur für reelle Zahlen formuliert wäre – was sie nicht war (und tatsächlich beruht jener Beweis auch stark auf die Wohlordnung von $\mathbb{Z}$ – $\mathbb{R}$ ist stattdessen nicht wohlgeordnet). Zum Glück kann aber die Aussage der Übungsaufgabe 3.38 leicht auf $\mathbb{R}$ übertragen werden: Da nämlich $xb^{-k} \in [0, b)$, gibt es $a_{-k} := \lfloor x b^{-k} \rfloor \in [0, b-1]_{\mathbb{N}}$ (wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußsche Klammerfunktion ist), so dass $xb^{-k} = a_{-k} + \delta$ für ein $\delta \in [0, 1)$. Somit gilt für $\xi_{-k} := \delta b^k \in [0, b^k)$,

$$x = a_{-k} b^k + \xi_{-k},$$

wie man zeigen wollte.

Es sei nun das Folgenglied a_n konstruiert. Da $\xi_n b^{n+1} \in [0, b)$, gibt es $a_{n+1} := \lfloor \xi_n b^{n+1} \rfloor \in [0, b-1]_{\mathbb{N}}$, so dass $\xi_n b^{n+1} = a_{n+1} + \delta$ für ein $\delta \in [0, 1)$. Somit gilt für $\xi_{n+1} := \delta b^{-n-1} \in [0, b^{-n-1})$

$$x = \sum_{h=-k}^{n} a_h b^{-h} + (a_{n+1} + \delta) b^{-n-1} = \sum_{h=-k}^{n+1} a_h b^{-h} + \xi_{n+1},$$

was die Aussage für $x \geq 0$ beweist.

Ist nun $x < 0$, so gilt

$$-x = \lim_{n\to\infty} \sum_{h=-k}^{n} a_h b^{-h}$$

für eine geeignete Zahl k und eine geeignete Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit

$$x = -\lim_{n\to\infty} \sum_{h=-k}^{n} a_h b^{-h}.$$

Dies vollendet den Beweis. □

Anmerkung 5.28. Neben dem – heute wohl üblichsten Fall von $b = 10$ – kann man in der Geschichte Beispiele von Kulturen finden, welche z.B. 12-, 20-, oder 60-adische Zahlensysteme benutzt haben. In dem (heutzutage wichtigsten) Fall von $p = 2$ geht die Intuition eines solchen alternativen, sog. *binären*, Zahlensystems auf Gottfried Leibniz zurück. Er erfand es 1679 bei seinem Entwurf einer Rechenmaschine. Die Hauptmotivation, um das binäre System einzuführen ist tatsächlich die Leichtigkeit, mit der Multiplikationen durchgeführt werden können, vgl. [**2**, § 1.3] für das Beispiel der Berechnung eines konkreten Produktes im binären System.

Mit dem obigen Satz haben wir nicht nur die Möglichkeit, mit $\mathbb{R}$ vertrauter umzugehen, da wir über eine dezimale Darstellung verfügen. Vielmehr können wir auch eine der wesentlichen Unterschiede zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erläutern.

Satz 5.29. *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis. Zum Beweis reicht es einen Abzählalgorithmus auf $\mathbb{Q}$ zu formulieren. Betrachte die Punkte auf einem 2-dimensionalem Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Jede rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ lässt sich mit einem Punkt dieses Gitter identifizieren. Man duchlaufe dieses Gitter entlang konzentrischen (alternieren gegen den Uhrzeigersinn und im Uhrzeigersinn) Halbkreisen, also $(0,1) \to (1,1) \to (0,2) \to (-1,1) \to (-2,1) \to (-1,2) \to (0,3) \to (1,2) \to (2,1) \to (3,1) \to \ldots$. Dadurch werden alle rationale Zahlen aufgelistet – eigentlich sogar mehrmals, denn z.B. wird sowohl $(1,2)$ als auch $(2,4), (4,8), \ldots$ gezählt. Um so mehr können die rationalen Zahlen nicht überabzählbar sein. □

Übungsaufgabe 5.30. Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie abzählbare Menge. Zeige, dass auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar ist *(Hinweis: Imitiere den Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.)*

Satz 5.31 (G. Cantor 1891). *Die Menge $[0,1]$ ist überabzählbar.*

Beweis. Es sei eine Abzählung von $[0,1]$ möglich, liste also $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$ auf. Jedes x_i hat eine Darstellung als Dezimalzahl, also $x_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots$, wobei jedes $a_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Es sei nun

$$\tilde{x} := 0, \tilde{a_1}\tilde{a_2}\tilde{a_3}\ldots,$$

wobei

$$\tilde{a_k} := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{kk} = 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist nach Konstruktion $\tilde{x}$ sowohl eine Dezimalzahl (also muss $\tilde{x} \in [0,1]$ sein), als auch von allen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ unterschiedlich. Dies widerspricht die Annahme, dass *jede Zahl zwischen 0 und 1 bereits durch $x_1, x_2, \ldots$ aufgelistet wurde*, und beweist die Aussage. □

Anmerkung 5.32. Wir merken an, dass dieser Beweis eine Anwendung des allgemeinen *Cantorschen Diagonalverfahrens*. Insbesondere, dieses Verfahren lässt sich auch zu anderen Zahlensystemen ohne Änderungen anwenden, z.B. binär (2-adische Brüche).

Insbesondere ist jede Menge, die $[0,1]$ enthält, überabzählbar.

Korollar 5.33. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar. Somit sind auch* $\mathbb{R}^d$ *und* $\mathbb{C}^d$ *für alle* $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *überabzählbar.*

Anmerkung 5.34. Man nennt **algebraisch** alle Zahlen, die Nullstellen eines Polynoms mit rationalen koeffizienten sind (insbesondere sind alle rationale Zahlen algebraisch). Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra ist auch die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen abzählbar, also muss die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ an $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ liegen. Die Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ heißen **transzendent**. Sogar die Existenz transzendenter Zahlen wurde vor 1844 bloß vermutet, bis Joseph Liouville sie endlich beweisen konnte.

Übungsaufgabe 5.35. (1) Es sei A eine nichtleere Menge. Zeige: Es existiert keine surjektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(A)$. *(Hinweis: Betrachte die Menge $B := \{x \in A : x \notin f(x)\}$.)*

(2) Folgere, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

(3) Zeige, dass die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$ doch abzählbar ist.

KAPITEL 6

Reihen

Wir formulieren die folgenden Sätze in grösster Allgemeinheit, d.h., für Folgen mit Werten in normierten Räumen. Man sollte zu diesem Zeitpunkt aber unbedingt mit $\mathbb{C}$ vertraut sein, da komplexwertige Folgen eine zentrale Rolle in dieser Vorlesung haben werden.

Definition 6.1. *Es sei X ein normierter Raum. Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und setze*

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

*Dann heißt s_k die k-**te Partialsumme** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die **zur Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **assoziierte Reihe**: sie wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ oder $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ bezeichnet. Ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so heißt die Reihe **konvergent** und der Grenzwert dieser Folge wird ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.*

*Ist die zur Folge $(\|a_n\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergent, so heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent.***

*Ist $X = \mathbb{R}$ und konvergiert die Folge der Partialsummen uneigentlich gegen $\pm\infty$, so heißt die Reihe **divergent**.*

Anmerkung 6.2. Wir kennen schon Beispiele sowohl von konvergenten als auch von divergenten Reihen: vgl. die Beispiele, die von Lemma 4.39 und Lemma 4.50 geleistet werden. Sie heißen **harmonische Reihe** bzw. **geometrische Reihe**.

Die Definition einer divergenten Reihe ist nicht ganz mit der Definition einer divergenten Folge konsequent. Der Ursprung dieser Definition liegt aber beim nächsten Satz.

Lemma 6.3. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge, so dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe genau dann konvergent, falls die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Somit hat die mit einer Folge positiver Zahlen assoziierte Reihe eine Folge partieller Summen, die entweder konvergent oder aber uneigentlich (gegen $+\infty$) konvergent ist. Im zweiten Fall spricht man aus historischen Gründen eben von einer divergenten Reihe.

Beweis. Die Folge der partiellen Summen ist eine monotone Folge. Die Aussage folgt somit aus den Sätzen 4.36 und 4.58. $\square$

Lemma 6.4. *Es seien X ein normierter Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$* keine *Nullfolge. Dann ist die mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe nicht konvergent.*

Beweis. Wäre die Reihe konvergent, dann gelte nach Definition $\lim_{k\to\infty} s_k = s$. Aus

$$a_n = s_n - s_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

wie wir zeigen wollten. $\square$

Allerdings konvergiert nicht jede zu einer Nullfolge assoziierte Reihe, wie das Beispiel der harmonische Reihe zeigt.

Beispiel 6.5. Daher folgt, dass für $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, die mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe nicht konvergiert. □

Anmerkung 6.6. Der Begriff von *konvergenten Reihe* kann allgemeiner auch für Familien (statt für Folgen) definiert werden,vgl. [**6**, § 6.3].

Aufgrund der obigen Definition kann man diverse Eigenschaften von Reihen auf Eigenschaften von Folgen zurückführen, unter anderem die folgenden Rechenregel.

rrr

Satz 6.7. *Es sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Gegeben seien eine Zahl $c \in \mathbb{K}$ und zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, so dass die assoziierten Reihen gegen a bzw. b konvergieren. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die zur Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe ist konvergent und $\sum_{k=0}^\infty (a_k + b_k) = a + b$.
(2) Die zur Folge $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe ist konvergent und $\sum_{k=0}^\infty (ca_k) = ca$.

Übungsaufgabe 6.8. Beweise den Satz 6.7.

Anmerkung 6.9. Ein bekanntes Paradoxon stammt vom antiken griechischen Philosophen Zenon von Elea. Zenon stellt sich vor, der schnelle Achilles wird von einer 10 mal langsameren Schildkröte herausgefordert, eine Strecke zu laufen – allerdings unter der Bedingung, dass ihr ein Vorsprung von 10 Längeneinheiten gewährleistet wird. In der Zeit, die Achilles braucht, um den Startpunkt der Schildkröte zu erreichen wird sie wohl 1 Längeneinehit gelaufen sein; in der Zeit, die Achilles braucht, um diese Längeneinheit durchzulaufen, wird die Schildkröte weitere 1/10 Längeneinheit gelaufen sein, usw. Dieses „usw." interpretiert Zenon als die Unmöglichkeit des Achilles, die Schildkröte zu erreichen – daher das scheinbare Paradoxon. In der Tat wissen wir heute, ein solches Paradoxon lässt sich leicht lösen. Denn die von der Schildkröte gelaufene Strecke beträgt zum n. Schritt genau

$$s_n = 1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k}$$

Längeneinheiten. Diese bildet eine geometrische Reihe, die gegen $\frac{10}{9}$ konvergiert (es handelt sich in der Tat um seinen Dezimalbruch). Nachdem sie $\frac{10}{9} = 1,\overline{1}$ Längeneinheiten gelaufen ist wird also die Schildkröte tatsächlich erreicht. Diese Lösung des Paradoxon wurde 1647 von Grégoire de Saint-Vincent gefunden.

Unser Ziel ist typischerweise, Voraussetzungen an die Glieder einer Folge zu formulieren, welche die Konvergenz der assoziierten Reihe implizieren. Unmittelbar aus dem Satz 5.10 folgt das folgende **Cauchysche Konvergenzkriterium für Reihen**.

cauchy2

Satz 6.10. *Es seien X ein normierter Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Konvergiert die assoziierte Reihe, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} a_p \right\|_X \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n > m \geq N_\varepsilon.$$

Die Umkehrung gilt, falls X ein Banachraum ist.

cor:akk

Korollar 6.11. *Es seien X ein Banachraum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Ist die damit assoziierte Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m}^{n} \|a_k\| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n > m > M.$$

Es folgt aus der Dreiecksungleichung dann das

$$\left\|\sum_{k=p}^{n} a_k\right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|a_k\| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n > m > M.$$

Da X ein Banachraum ist, folgt die Aussage aus dem Satz cauchy2 6.10. ☐

Anmerkung 6.12. Man kann zeigen, dass auch die folgende Umkehraussage gilt: Gibt es *keine* Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, X ein normierter Raum, deren assoziierte Reihe absolut konvergent ist, ohne konvergent zu sein, so ist X ein Banachraum.

nurunendl2 Anmerkung 6.13. Ähnlich wie in Satz nurunendl 4.27 spielen bei der Konvergenz einer Reihe die ersten endlich vielen Glieder keine Rolle: Es seien $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und betrachte eine beliebige neue Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $a_n = \tilde{a}_n$ für alle $n \geq \tilde{N}$. Genau dann konvergiert die zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe, wenn die zur Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergiert (die Grenzwerte stimmen aber in diesem Fall offensichtlich *nicht* überein.

telrei Satz 6.14. *Es seien X ein normierter Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge und betrachte die zur Folge*

$$(a_n - a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

assoziierte Reihe. Genau dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, wenn die Reihe gegen $a - a_0$ konvergiert.

Solche Reihen heißen **Teleskopenreihen**.

Beweis. Die Folge der Partialsumme lautet

$$s_1 = a_1 - a_0, \qquad s_2 = a_2 - a_1 + a_1 - a_0 = a_2 - a_0,$$

und i.A.

$$s_n = a_n - (a_{n-1} - a_{n-1}) \ldots - (a_1 - a_1) - a_0 = a_n - a_0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt nach Satz rrf 4.43: genau dann konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und in diesem Fall ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0,$$

was zu beweisen war. ☐

nn1 Beispiel 6.15. Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, wobei $a_n := \frac{1}{n(n+1)}$. Da

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

ist die zu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ assoziierte Reihe eine Teleskopreihe. Somit konvergiert sie gegen $a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$. ☐

Das folgende **Majorantenkriterium** ist oft nützlich.

Satz 6.16. *Es sei X ein Banachraum. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen, so dass es $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit*

antenbeding (6.1) $$\|a_n\|_X \leq b_n \qquad \text{für alle } n \geq N$$

(und insbesondere $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|_X$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beweis. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Somit ist die Folge der Partialsummen Cauchy, d.h., für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon > p$, so dass

$$\sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon \qquad \text{für alle } n > m > N_\varepsilon.$$

Wegen (6.1) gilt auch

$$\sum_{k=m}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k \qquad \text{für alle } n > m.$$

Somit ist dank dem Korollar 6.11 die mit $(\|a_n\|)_{n \inf \mathbb{N}}$ assoziierte Reihe konvergent.

Das selbe Argument liefert wiederum, dass die mit $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe divergiert, falls die mit $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe das tut. □

Anmerkung 6.17. Es folgt unmittelbar aus dem Majorantenkriterium, dass jede *absolut* konvergente Reihe auch konvergent ist.

Beispiel 6.18. Es sei $s \in \mathbb{Q}$ und betrachte die mit

$$a_n := n^{-s}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

assoziierte Reihe. Dann ist diese Reihe genau dann konvergent, wenn $s > 1$. Wir zeigen dies unter Verwendung vom Satz 6.3.

Betrachte erst den Fall $s > 1$. Es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $2^m - 1 \geq n$: dann gilt

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{2^m-1} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(m-1)s}} + \ldots + \frac{1}{(2^m-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + \ldots + 2^{m-1}\frac{1}{2^{(m-1)s}} \\ &= \frac{1 - 2^{(1-s)m}}{1 - 2^{1-s}} \\ &< \frac{1}{1 - 2^{1-s}}. \end{aligned}$$

Diese Beschränktheit liefert die Aussage.

Ist jedoch $s \leq 1$, so gilt divergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium, da

$$a_n \geq n^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

und wir wissen schon, dass die mit $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ assoziierte Reihe (d.h., die harmonische Reihe) divergiert.

Übungsaufgabe 6.19. Verallgemeinere das Resultat über die Konvergenz der geometrichen Reihe auf den komplexen Fall mit Hilfe des Majorantenkriteriums und Übungsaufgabe 4.48.

n2 Beispiel 6.20. Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n := \frac{1}{n^2}$. Da

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

und

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

ist die zu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ assoziierte Reihe nach dem Majorantenkriterium und Beispiel 6.15 konvergent. □

bsp:nnn

Beispiel 6.21. Es sei $a_n := \frac{n!}{n^n}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, denn

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{2}{n^2}$$

für alle $n \geq 2$. □

Unser Ziel ist also, hinreichende Bedingungen an eine (Null)Folge zu finden, so dass die assoziierte Reihe konvergiert. Das folgende **Quotientenkriterium** ist meistens sehr nützlich.

quotkrit

Satz 6.22. *Es sei X ein normierter Raum. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge, so dass ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $q \in [0,1)$ mit*

quot1

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \qquad \text{für alle } n \geq N. \tag{6.2}$$

Dann ist die assoziierte Reihe absolut konvergent. Wenn aber ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

quot2

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq q > 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{6.3}$$

dann ist die assoziierte Reihe gegen $+\infty$ uneigentlich konvergent.

Das Quotientenkriterium kann leicht direkt bewiesen werden. Wir wollen jedoch ihn als Folgerung eines noch allgemeineren Satzes erhalten, des sogenannten **Wurzelkriteriums** für Reihen.

Satz 6.23. *Es sei X ein normierter Raum. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge und*

$$q := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ist $q < 1$, dann ist die assoziierte Reihe absolut konvergent.

Wenn aber $q > 1$, dann ist die assoziierte Reihe nicht konvergent, ja ist die mit $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe divergent.

Beweis. Ist $q < 1$, so gilt ab einem $N \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \qquad \text{d.h.} \qquad |a_n| \leq q^n < 1 \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Somit wird die mit $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe durch die geometrische Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ majorisiert. Die Aussage folgt somit, dank dem Majorantenkriterium. □

Übungsaufgabe 6.24. 1) Zeige, dass das Wurzelkriterium das Quotientenkriterium impliziert, aber nicht umgekehrt. *(Hinweis: Betrachte die mit der Folge*

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ gerade}, \\ 3^{-n}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

assoziierte Reihe.)

2) Zeige, dass im Fall $q = 1$ weder das Wurzelkriterium noch das Quotientenkriterium aussagekräftig sind. *(Hinweis: Betrachte die mit der Folge*

$$a_n := n^{-s}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

assoziierte Reihe, für ein $s \in \mathbb{Q}$.)

Übungsaufgabe 6.25. a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Es sei $q := \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvertiert (bzw. divergiert) wenn $q < 1$ (bzw. $q > 1$): dies nennt sich *Wurzelkriterium*. *(Hinweis: Zeige dass die Reihe absolut konvergent ist, wenn $q < 1$.)*

b) Es sei

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 3^{-n} & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Zeige mit Hilfe von a), dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Konnte das Quotientenkrierium auch angewandt werden?

Übungsaufgabe 6.26. a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass genau dann $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt, wenn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
b) Es sei $x > 0$. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^n} = +\infty$. *(Hinweis: Wende a) an und benutze, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert.)*

Das nächste wird **Leibniz-Kriterium** genannt.

leibre

Satz 6.27. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine*
- *monoton fallende*
- *Nullfolge*
- *mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann konvergiert die (sog. ***alternierende****) Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Ist a der Grenzwert der Reihe, so erfüllt die n-te Partialsumme die Abschätzung $|a - s_n| \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der partiellen Summen. Dann gilt

$$s_{2k+2} - _{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0,$$

und somit

$$s_0 \geq s_2 \geq \ldots s_{2k} \geq s_{2k+2}, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Es gilt aber auch

$$s_{2k+3} - _{2k+1} = -a_{2k+3} + a_{2k+2} \leq 0,$$

und somit

$$s_1 \leq s_3 \leq \ldots s_{2k+1} \geq s_{2k+3}, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Man sieht schließlich, dass aus $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0$ folgt, dass

$$s_{2k+1} \leq s_{2k}, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir haben damit bewiesen, dass die Teilfolge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und (wegen $s_{2k} \geq s_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$) beschränkt, also konvergent gegen $\inf_{k\in\mathbb{N}} s_{2k}$. Auch gilt, dass die Teilfolge $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und (wegen $s_{2k+1} \leq s_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$) beschränkt, also konvergent gegen $\sup_{k\in\mathbb{N}} s_{2k+1}$.

Diese beiden Grenzwerte stimmen überein, denn

$$S - S' = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0.$$

Man zeigt zum Schluss die Konvergenzaussage. Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_{2k} - S| \leq \varepsilon \qquad \text{so wie auch} \qquad |s_{2k+1} - S| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq N,$$

und insbesondere

$$|s_h - S| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } h \geq \tilde{N} := 2N + 1.$$

Da $a \in [s_k, s_{k+1}]$ (für k ungerade) bzw. $a \in [s_{k+1}, s_k]$ (für k gerade) liegt, folgt aus

$$|s_{k+1} - s_k| = a_{k+1}, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

die Abschätzung. □

Definition 6.28. *Es seien X ein normierter Raum, $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge, und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt die mit $(a_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe eine* ***Umordnung*** *der mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierten Reihe.*

satz:absunb

Satz 6.29. *Es sei X ein Banachraum und $(a_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge, deren assoziierte Reihe absolut konvergent ist. Dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe absolut (und alle haben den selben Grenzwert).*

Beweis. Es sei a den Grenzwert der mit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ assoziierten Reihe, der dank dem Korollar cor:akk 6.11 existiert. Es sei $\varepsilon > 0$. Da die Reihe absolut konvergent ist, gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$\left| a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=N}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man kann immer $\tilde{N}$ so gross wählen, dass

$$\{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \subset \{\tau(0), \tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(\tilde{N})\}.$$

Somit gilt (wieder dank der Dreiecksungleichung) für alle $m \geq \tilde{N}$

$$\left| a - \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} \right| \leq \left| a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass auch die mit $(a_{\tau(n)})_{\mathbb{N}}$ assoziierten Reihe gegen a konvergiert. Tatsächlich konvergiert sie sogar absolut, da die obigen Argumente sich auch auf die mit $(|a_n|)_{\mathbb{N}}$ assoziierten Reihe anwenden lassen. □

Anmerkung 6.30. Man nennt eine Reihe **unbedingt konvergent**, falls jede ihrer Umordnungen konvergiert. Somit ist insbesondere jede unbedingt konvergente Folge auch konvergent, und der Satz satz:absunb 6.29 besagt, dass in einem Banachraum jede absolut konvergente Reihe auch unbedingt konvergent ist. Umgekehrt besagt der sog. Satz von Dvoretzky–Rogers, dass es in jedem *unendlichdimensionalen* Banachraum eine Reihe gibt, die unbedingt aber nicht absolut konvergiert.

Beispiel 6.31. Es sei $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$. Dann erfüllt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums und somit konvergiert die assoziierte (alternierende) Reihe, welche **alternierende geometrische Reihe** heißt.

Man zeigt aber (Übungsaufgabe!), dass es eine nichtkonvergente Umordnung dieser Reihe existiert. *(Hinweis: betrachte die ungeraden Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wende das Majorantenkriterium an).* □

Beispiel 6.32. Folgere aus dem Leibniz-Kriterium, dass man unter den Rechenregeln für konvergente Reihen keine Regel für *Produktreihen* erwarten kann, d.h., konvergieren die mit den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihen, so konvergiert i.A. die mit $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe *nicht*.

Jedoch gilt die folgende sogenannte *Cauchysche Produktformel*

cpf Satz 6.33. *Gegeben seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die assoziierten Reihen konvergieren, eine davon sogar absolut. Dann gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right).$$

Man kann sogar zeigen: Konvergieren die beiden Reihen absolut, so konvergiert auch die dritte Reihe absolut.

Beweis. Es sei o.B.d.A. die mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziierte Reihe absolut konvergent, etwa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: \alpha.$$

Es seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}, (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folgen der partiellen Summen der mit

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

assoziierten Reihen, welche nach Voraussetzung konvergieren – etwa gegen A, B, C – und bezeichne mit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Nullfolge, die durch

$$\beta_n := B_n - B, \qquad n \in \mathbb{N},$$

definiert ist. Dann kann man C_n so umschreiben:

$$\begin{aligned}
C_n &:= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots a_nb_0)\\
&= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0\\
&= a_0(B+\beta_n) + a_1(B+\beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B+\beta_0)\\
&= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots a_n\beta_0\\
&=: A_nB + \gamma_n.
\end{aligned}$$

Nun gilt nach Definition $\lim_{n\to\infty} A_nB = AB$, und somit ist

$$\lim_{n\to\infty} C_n = AB$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

äquivalent.

Da $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $|\beta_n| < \epsilon$ für alle $n > N_\epsilon$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leq |\beta_0a_n + \ldots \beta_{N_\epsilon}a_{n-N_\epsilon}| + |\beta_{N_\epsilon+1}a_{n-N_\epsilon-1} + \ldots \beta_na_0|\\
&\leq |\beta_0a_n + \ldots + \beta_{N_\epsilon}a_{n-N_\epsilon}| + \epsilon\alpha.
\end{aligned}$$

Somit, im Grenzwert für (N_ϵ fest und) $n \to \infty$ bekommen wir

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \epsilon\alpha,$$

da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Diese Abschätzung kann für alle $\epsilon > 0$ erhalten werden, somit muss laut der Übungsaufgabe archimforcauchy 3.34.(1) bereits

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0$$

bedeutet – was bei einer positiv-wertigen Folge $(|\gamma_n|)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ genau dann der Fall ist, wenn $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$. □

Der obige Satz geht auf Augustin Louis Cauchy zurück, der aber nur den Spezialfall *zweier* absolut konvergenten Reihen betrachtet hat (und in diesem Fall ist die Produktreihe sogar absolut konvergent). In dieser Allgemeinheit stammt der Satz von Franz Mertens.

ÜBUNGSAUFGABE 6.34. Sind die folgende Reihen konvergent oder divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{4n^4-3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{9^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2-n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{3n^2}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.35. Es sei $z_0 \geq 0$ eine ganze Zahl und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ eine Folge von Zahlen aus $\{0,1,\ldots,9\}$. Man definiert $a_n := z_0 + \frac{z_1}{10} + \ldots + \frac{z_n}{10^n}$ und schreibt $a_n = z_0, z_1z_2\ldots z_n$. Zeige

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, falls $z_0 = 0$ und $z_n = 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Q}$, falls $n_0, p \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $z_{n+p} = z_n$ für alle $n \geq n_0$.

Es sei nun $a \geq 0$ beliebig. Finde eine ganze Zahl z_0 und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen aus $\{0,1,\dots,9\}$, so dass $a = \lim_{n\to\infty}(z_0, z_1 \dots z_n)$. Mann nennt $(z_0, z_1 \dots z_n)$ die *Dezimalbruchzerlegung* von a. Ist sie eindeutig?

dardez BEISPIEL 6.36. Es sei $x \in [0, 10)$. Ihre Darstellung als Dezimalzahl kann man als

$$x = x_0, x_1 x_2 \dots,$$

hinschreiben, wobei $x_i \in \{0,1,\dots,9\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Äquivalent kann man sie auch in Reihenform darstellen, also

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}.$$

Lass uns noch mal zeigen, dass diese Reihe konvergiert. Tatsächlich wird sie durch die Reihe

$$9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

majorisiert, welche eine (konvergente) geometrische Reihe ist.

Die Darstellung lässt sich leicht auf allgemeine reelle Zahlen verallgemeinern, indem man $x_0 \in \mathbb{Z}$ zuläßt. $\square$

ANMERKUNG 6.37. Es sei $x_0 = \dots = x_{m-1} = 0$. Manchmal benutzt man (und Rechner sowieso) die sog. *Exponentialschreibweise*: der entsprechend ist

$$x_0, x_1 x_2 \dots x_{m-1} x_m x_{m+1} \dots \equiv (x_m, x_{m+1} x_{m+2} \dots E\ -m).$$

Z.B. schreibt man die Zahl $0,015$ äquivalent als $(1,5E\ -2)$. Allgemeiner schreibt man

$$\dots x_{-2} x_{-1} x_0, x_1 x_2 \dots x_m x_{m+1} \dots \equiv (x_{-q}, x_{-q+1} \dots E\ q),$$

falls $x_n = 0$ für alle $n < -q$, z.B. $13,2 \equiv (1,32E\ 1)$. Allgemeiner heißt also die Schreibweise

$$(y_0, y_1 y_2 \dots E\ n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_i}{10^{k-n}}.$$

6.1. Potenzreihen

Besonders wichtig sind die Reihen der folgenden Gestalt.

DEFINITION 6.38. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Dann heißt*

$$P : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine ***Potenzreihe****.*

Bitte bedenke, dass der (formale) Ausdruck $P(z)$ einfach

$$P(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

bedeutet. Falls $P(z)$ für alle $z \in M \subset \mathbb{K}$ konvergiert, kann man P als Abbildung von M nach $\mathbb{K}$ betrachten.

Es bereitet keinerlei Schwierigkeiten, Potenzreihen mit komplexen Argumenten zu betrachten – was wir immer machen werden, d.h., $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in diesem Teilabschnitt.

ergenzminor SATZ 6.39. *Es sei P eine mit einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ assoziierte Potenzreihe, welche an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. So konvergiert $P(z)$ absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$.*

Beweis. Da $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma critnoconv 6.4 eine Nullfolge ist, gibt es notwendigerweise ein $M > 0$ mit

$$|a_n z_0^n| \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. Schreibe $q := |\frac{z}{z_0}|$ und beachte, dass

$$|a_n z^n| \leq M q^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gilt. Weil nach dem Satz rrr 6.7

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{M}{1-q},$$

gilt die Aussage dank dem Majorantenkriterium. □

Das motiviert die Einführung der Folgenden.

Definition 6.40. *Es sei P eine Potenzreihe und setze*

$$R(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} : P(r) \text{ konvergiert }\}.$$

Dann heißt $R(P)$ Konvergenzradius *von P.*

Man merke, dass $\{r \in \mathbb{R} : P(r)$ konvergiert $\}$ sicherlich nicht leer ist (da 0 darin liegt), und somit existiert immer das Supremum dieser Menge.

Selbstverständlich hat jede Potenzreihe genau *einen* Konvergenzradius in $[0, \infty) \cup \{\infty\}$.

konvdiv Satz 6.41. *Es sei P eine Potenzreihe. Dann ist $P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent (sogar absolut), falls $|z| < R(P)$, und divergent, falls $|z| > R(P)$.*

Beweis. Gilt $|z| < R$, so nimm $r > 0$ mir $r \in (|z|, R)$. Da nach Definition von Konvergenzradius $P(r)$ konvergiert, konvergiert nach dem Satz konvergenzminor 6.39 $P(z)$ bereits absolut. Es sei wiederum $|z| > R$. Wäre $P(z)$ konvergent, so könnte man einen Konvergenzradius größer als R finden, was die Voraussetzung widerspricht. □

eulercauchy Lemma 6.42. *Es sei P eine mit einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ assoziierte Potenzreihe. Dann gelten die folgenden beiden Formel zur Bestimmung ihres Konvergenzradius:*

$$R = \frac{1}{p} = \frac{1}{q},$$

wobei

$$p := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \text{und} \qquad q := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

unter der Konvention, dass $\frac{1}{0} := +\infty$ und $\frac{1}{+\infty} = 0$. (Dabei setzt man natürlich voraus, dass der Grenzwert p überhaupt existiert).

Beweis. Lass uns erst zeigen, dass $R = p^{-1}$. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$p^* := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \gtrless 1,$$

je nach dem, ob $|z| > p^{-1}$ (und insbesondere, wenn $p = +\infty$), oder $|z| < p^{-1}$ (und insbesondere, wenn $p = 0$). Somit folgt die Aussage direkt aus dem Quotientenkriterium und aus dem Satz konvdiv 6.41.

Wir zeigen nun, dass $R = q^{-1}$. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$q^* := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n z^n} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \gtrless 1,$$

je nach dem, ob $|z| > q^{-1}$ (und insbesondere, wenn $q = +\infty$), oder $|z| < q^{-1}$ (und insbesondere, wenn $q = 0$). Somit folgt die Aussage direkt aus dem Wurzelkriterium. □

Anmerkung 6.43. Es gibt eigentlich keinen Grund, um nur Potenzreihen der obigen Gestalt zu betrachten. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge, man kann also auch

$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

betrachten. Solche heißen **Laurent-Reihen**, nach Pierre Alphonse Laurent. Ihre Konvergenztheorie ist ähnlich, wenn auch die Resultate teilweise sich unterscheiden – z.B. sind sie nicht auf Kreisscheiben, sondern auf Kreisringen konvergent. Genauso wie Potenzreihen spielen Laurent-Reihen eine sehr wichtige Rolle in der Funktionentheorie.

Eine wichtige Anwendung des Quotientenkriterium ist die Folgende.

potenzreihe Satz 6.44. *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die* ***Exponentialreihe*** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *absolut.*

Beweis. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Somit hat diese Potenzreihe Konvergenzradius $R = \infty$ dank dem Lemma eulercauchy 6.42, und insbesondere ist sie für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. □

Was ist der Grenzwert dieser Reihe? Diese Frage wurde 1748 von Leonhard Euler beantwortet.

lemma:expf Lemma 6.45. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergente Folge. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n .$$

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Betrachte ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ groß genug, dass sowohl

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{(|z|+1)^k}{k!} \le \frac{\epsilon}{3} \quad \text{als auch} \quad |z_n| \le |z| + 1 \qquad \text{für alle } n \ge N_\epsilon$$

gilt. Somit gilt für alle $n \ge N_\epsilon$ auch

$$\left|\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{N_\epsilon - 1} \left|\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right| + \sum_{k=N_\epsilon}^{n} \binom{n}{k}\frac{|z_n|^k}{n^k} + \sum_{k=K}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}.$$

Wir wollen alle drei Summanden abschätzen. Aus der Übungsaufgabe geomfol 4.48 und aus der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_\epsilon - 1} \left|\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right| = 0,$$

d.h., es gibt $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{N_\epsilon - 1} \left|\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Da

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \le \frac{1}{k!}$$

folgt, dass der zweite Summand für n groß genug durch

$$\sum_{k=N_\epsilon}^{n} \binom{n}{k}\frac{|z_n|^k}{n^k} \le \sum_{k=N_\epsilon}^{n} \frac{|z_n|^k}{k!} \le \sum_{k=N_\epsilon}^{n} \frac{(|z|+1)^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$$

abgeschätzt werden kann. Schließlich gilt für den dritten Summand

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$$

für K groß genug, aufgrund der Konvergenz der Exponentialreihe. Somit gilt für alle $n \geq N_\epsilon$

$$\left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| < \epsilon,$$

was den Beweis erbracht. □

Anmerkung 6.46. Deshalb gilt: Ist $z = 1$, so konvergiert diese Reihe gegen die Zahl e aus dem Beispiel 4.37. Ist $z = m \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe gegen die Potenz e^m.

Definition 6.47. *Die Funktion*

$$\exp : \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}$$

ist wohldefiniert. Sie wird ***(komplexe) Exponentialfunktion*** *genannt. Die Zahl* $\exp(z)$ *wird üblicherweise auch* e^z *geschrieben.*

Anmerkung 6.48. Wir haben in der Anmerkung 4.38 gesehen, dass die Einführung der Zahl e geht auf eine Frage des Jacob Bernoulli über Zinseszinskalkulation zurück. Diese Frage wurde von seinem Neffe Daniel Bernoulli beantwortet, der somit 1728 die Formel $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ vorgeschlagen hat. Die Reihendarstellung der Exponentialfunktion wie in Definition 6.47 wurde bereits 1669 von Sir Isaac Newton bewiesen.

Satz 6.49. *Die Exponentialfunktion genügt der Gleichung*

$$e^z e^w = e^{z+w} \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}, \tag{6.4}$$

dem sogenannten Gruppengesetz*.*

Das Gruppengesetz wird manchmal auch *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion* genannt.

Beweis. Nach dem Lemma 6.45 gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(z)\exp(w) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{w}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z + w + \frac{zw}{n}}{n}\right)^n \\ &= \exp(z + w), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Übungsaufgabe 6.50. Leite den Satz 6.49 aus der Cauchyschen Produktformel (statt aus dem Lemma 6.45) her.

Anmerkung 6.51. Exponentialfunktionen (oder, genauer gesagt, Funktionen der Form $c\exp(\cdot)$ für ein $c \in \mathbb{C}$) die einzigen Abbildungen, die (6.4) und

$$\exp(0) = 1. \tag{6.5}$$

erfüllen, vgl. Übungsaufgabe 7.75 für eine ähnliche Aussage. Dies wurde zuerst 1821 von Augustin Louis Cauchy und 1826 von Niels Abel erkannt.

Korollar 6.52. *Es sei* $x \in \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$|e^{ix}| = 1.$$

Beweis. Man hat für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$$

(warum gilt die zweite Gleichung?). □

Da e^{ix} immer auf der Einheitssphäre $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ von $\mathbb{C}$ liegt, sind wir dazu motiviert, folgende Definition einzuführen.

Definition 6.53. *Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt* $\operatorname{Re} e^{ix}$ ***Cosinus von*** *x, während* $\operatorname{Im} e^{ix}$ ***Sinus von*** *x heißt. Diese Objekte werden mit* cos *bzw.* sin *bezeichnet.*

Somit definieren cos und sin zwei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Definition 6.54. *Die Zahl π wird dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die kleinste strikt positive Nullstelle von* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist.*

cossinexp Anmerkung 6.55. Anders gesagt gilt

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es folgt unmittelbar aus den Formeln $2 \operatorname{Re} z = z + \overline{z}$ bzw. $2i \operatorname{Im} z = z - \overline{z}$, dass

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Damit kann man die Funktionen cos und sin leicht auf $\mathbb{C}$ erweitern.

Definition 6.56. *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann heißen die Funktionen*

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \in \mathbb{C} \qquad \mathbb{C} \ni \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \in \mathbb{C}$$

(komplexe) Cosinus- *bzw.* ***Sinusfunktion****.*

Übungsaufgabe 6.57. Die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ ist die übliche (reelle) Exponentialfunktion. Zeige induktiv, dass

$$\exp(q) = e^q \qquad \text{für alle } q \in \mathbb{Q}.$$

trigon Anmerkung 6.58. Im Allgemeinen stimmt *nicht* mehr, dass $\cos(z) = \operatorname{Re} e^{iz}$ und $\sin(z) = \operatorname{Im} e^{iz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Allerdings gilt definitionsgemäß die fundamentale *Eulersche Identität*

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} (\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Das motiviert zur Einführung einer neuen Koordinatendarstellung der komplexen Ebene. Jede Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann nämlich durch ihren Betrag $|z| \in (0, \infty)$ (ihr Abstand vom Ursprung von $\mathbb{R}^2$) sowie durch den Winkel $\phi \in [0, 2f\pi)$ zwischen dem Vektor z und der x-Achse in $\mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt werden. Dies liefert die alternative Darstellung

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi),$$

wobei $|z|$ einfach der Betrag von z ist, während die Zahl ϕ **Argument** von z heißt. (Diese Darstellung bestimmt 0 nicht eindeutig, denn selbstverständlich $0 = 0 \cos \phi + i 0 \sin \phi$ für alle $\phi \in \mathbb{R}$). Man spricht von **polaren Darstellung** von z.

Übungsaufgabe 6.59. Beweise die Additionsformel

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \qquad \sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Direkt aus der Exponentialreihe folgt eine Potenzreihendarstellung dieser trigonometrischen Funktionen.

Lemma 6.60. *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Anmerkung 6.61. Diese Definition zeigt unmittelbar, dass cos eine gerade Funktion ist und sin eine ungerade Funktion, d.h. $\cos(-z) = \cos(z)$ bzw. $\sin(-z) = -\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 6.62. *Die Exponentialfunktion erfüllt die folgenden Eigenschaften.*
(1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist e^x (reell und) strikt positiv.
(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.

Beweis. Es folgt direkt aus der Definition, dass $e^x \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, folgt aus der Darstellung

$$e^x = (e^{\frac{x}{2}})(e^{\frac{x}{2}}),$$

dass $e^x \geq 0$. Da aber

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt, ist notwendigerweise $e^x \neq 0$.

Um die Monotonie von exp zu zeigen reicht es zu sehen, dass

$$\frac{e^{x+h}}{e^x} > 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},\ h > 0.$$

Tatsächlich folgt aus dem Gruppengesetz

$$\frac{e^{x+h}}{e^x} = e^h.$$

Somit gilt die Aussage, denn definitionsgemäß hat man für alle $h > 0$

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \ldots > 1.$$

Das beweist (2). □

KAPITEL 7

Stetige Funktionen und Elemente der Topologie

Definition 7.1. *Es seien X,Y normierte Räume und $A \subset X$. Es sei $f : A \to Y$ und $x_0 \in X$ (x_0 nicht notwendigerweise Element von A!) und $y \in Y$. Man sagt, f* ***konvergiert gegen*** *y* ***für*** *x* ***gegen*** *x_0, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass*

$$x \in A \text{ und } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{implizieren} \quad \|f(x) - y\| \leq \varepsilon,$$

d.h.,

$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\epsilon(y),$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y.$$

In diesem Fall heißt y ***Grenzwert von*** *f* ***für*** *x* ***gegen*** *x_0.*

Der moderne Begriff von Konvergenz von Funktionen wurde erst von Karl Weierstraß am Ende des 19. Jahrhunderts formuliert.

Der Vollständigkeit halber definieren wir auch die folgenden Begriffe von Konvergenz, falls die Definitions- und/oder die Zielmenge einer Funktion eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Definition 7.2. *Es seien Y ein normierter Raum und $A \subset \mathbb{R}$, A nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt. Es seien $f : A \to Y$ und $y \in Y$. Man sagt, f* ***konvergiert gegen*** *y* ***für*** *x* ***gegen*** *$+\infty$ (bzw.* ***für*** *x* ***gegen*** *$-\infty$), falls für alle $\epsilon > 0$ ein $m > 0$ existiert so, dass*

$$x \in A \text{ und } x > m \text{ (bzw. } x < -m) \quad \text{implizieren} \quad \|f(x) - y\| \leq \varepsilon.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y \quad \text{(bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y).$$

uneiggrenz1 Definition 7.3. *Es seien X ein normierter Raum und $A \subset X$. Es sei $f : A \to \mathbb{R}$. Man sagt, f* ***konvergiert uneigentlich gegen*** *$+\infty$* ***(bzw.*** *$-\infty$****)*** ***für*** *x* ***gegen*** *x_0, falls für alle $M > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass*

$$x \in A \text{ und } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{implizieren} \quad f(x) > M \text{ (bzw. } f(x) < -M).$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{(bzw. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty).$$

Definition 7.4. *Es seien $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$, A nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt. Man sagt, f* ***konvergiert uneigentlich gegen*** *$+\infty$ für x gegen $+\infty$ (bzw.* ***für*** *x* ***gegen*** *$-\infty$), falls für alle $M > 0$ ein $m > 0$ existiert so, dass*

$$x \in A \text{ und } x > m \text{ (bzw. } x < -m) \quad \text{implizieren} \quad f(x) \geq M.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{(bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty).$$

Ähnlich sagt man, f ***konvergiert uneigentlich gegen** $-\infty$* ***für** x* ***gegen** $+\infty$ (bzw.* ***für** x* ***gegen** $-\infty$), falls für alle $M > 0$ ein $m > 0$ existiert so, dass*

$$x \in A \text{ und } x > m \text{ (bzw. } x < -m) \quad \text{implizieren} \quad f(x) \leq -M.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{(bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty).$$

identstet BEISPIEL 7.5. Die identische Funktion $f : \mathbb{C} \ni x \mapsto x \in \mathbb{C}$ konvergiert gegen y für x gegen jedes y. □

konststet BEISPIEL 7.6. Es sei X ein normierte Raum und $\alpha \in \mathbb{C}$. Die konstante Funktion $f : X \ni x \mapsto \alpha \in \mathbb{C}$ konvergiert gegen α für x gegen jedes $y \in X$. □

DEFINITION 7.7. *Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Es seien $f : A \to Y$ und $x \in A$. Ein Vektor $y \in Y$ heißt* ***Häufungspunkt*** *von f an der Stelle x, falls für alle $\varepsilon > 0$ das Urbild von $U_\varepsilon(y) \cap U_\varepsilon(f(x))$ unter f eine unendliche Menge ist.*

ÜBUNGSAUFGABE 7.8. Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Es seien $f : A \to Y$, $x_0 \in A$ und $y \in Y$. Zeige:

- Konvergiert f für x gegen x_0, so ist sein Grenzwert auch ein Häufungspunkt von f an der Stelle x_0.
- Gibt es mehrere Häufungspunkte von f an der Stelle x_0, so kann f nicht konvergieren, für x gegen x_0.

Folgere, dass die Funktion

$$f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

nicht konvergent ist, für x gegen 0.

DEFINITION 7.9. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* periodisch*, falls es $L > 0$ existiert, so dass $f(x+L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die* Periode *von f ist*

$$\inf\{L > 0 : f(x+L) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

eriodnoconv BEISPIEL 7.10. Eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann für x gegen $\pm\infty$ nicht konvergent sein, denn jedes Element aus $f(\mathbb{R})$ Häufungspunkt von f in ∞ ist.

BEISPIEL 7.11. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert wird. Dann konvergiert f *nicht* gegen 0, für x gegen 0. Es sei nämlich $\varepsilon = 1$, dann gibt es für δ beliebig klein stets ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $|x - 0| < \delta$ und dennoch $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \frac{1}{|x|} \geq 1$. □

expxn ÜBUNGSAUFGABE 7.12. Es sei $n \in \mathbb{N}$ (beliebig groß). Folgere aus der Definition der Exponentialreihe, dass die Exponentialfunktion

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

erfüllt.

.gestetsatz SATZ 7.13. *Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Eine Funktion $f : A \to Y$ ist genau dann gegen y für x gegen x_0 konvergent, wenn $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$ für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$.*

Beweis. Es sei f gegen y konvergent, für x gegen x_0, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $\delta > 0$ so, dass

impl1 (7.1) $$x \in A \text{ und } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{impliziert} \quad |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Da aber $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gibt es also für das obige $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

impl2 (7.2) $$\|x_n - x_0\| < \delta \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wegen (7.1) und (7.2) gilt also: Es gibt für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

impl3 (7.3) $$\|f(x_n) - y\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N,$$

was zu zeigen war.

Es sei umgekehrt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt die Konvergenzbedingung nicht, so gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$

- $x \in A$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ und dennoch
- $\|f(x) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$.

Insbesondere gebe es also für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ so, dass

$$\|x - x_n\| < \frac{1}{n} := \delta.$$

Damit wird eine gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildet – aber auch $\|y - f(x_n)\| \geq \varepsilon$ – und somit keine gegen y konvergente Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Anmerkung 7.14. Manche Autoren bevorzugen die folgende ähnliche, aber unterschiedliche Definition der Konvergenz: Man sagt dann, f konvergiert gegen y für x gegen x_0, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass

$$x \in A \text{ und } 0 < \|x - x_0\| \text{ und } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{implizieren} \quad \|f(x) - y\| \leq \varepsilon.$$

Wählt man diese Definition (wie z.B. in **[5]**, aber nicht in **[4, 6]**), so fordert man in der Definition von Konvergenz, dass bereits aus der (schwächeren) Annahme $0 < \|x - x_0\| < \delta$ (und nicht allgemein aus $\|x - x_0\| < \delta$) folgen soll, dass $f(x) \in U_\epsilon(y)$. Denn Heuser und alle wollen bewusst Fälle wie den Folgenden betrachten: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert wird. Mit unseren Definition hat die Funktion in 0 *keinen* Grenzwert, denn in jeder Umgebung von 0 gibt es sowohl einen Punkt, in dem f den Wert 1 annimmt (die 0), als auch unendlich viele Punkte, in denen die Funktion den Wert 0 annimmt. Doch für die obige, schwächere Definition der Konvergenz, gilt nämlich

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

(warum?).

Ähnlich sollte man auch in der Definition 7.3 die Bedingung

$$x \in A \text{ und } \|x - x_0\| < \delta \quad \text{implizieren} \quad f(x) > M \text{ (bzw. } f(x) < -M).$$

durch die (schwächere) Bedingung

$$x \in A \text{ und } 0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \text{implizieren} \quad f(x) > M \text{ (bzw. } f(x) < -M).$$

ersetzen.

Auch das Folgenkriterium für die Konvergenz ändert sich dann wie folgt:

Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Eine Funktion $f : A \to Y$ ist genau dann gegen y für x gegen x_0 konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{0\}$.

Es ist wie üblich möglich, Rechenregel zu beweisen, welche die Überprüfung der Konvergenz vereinfachen.

rrk SATZ 7.15. *Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to Y$, welche gegen y_0 bzw. z_0 für x gegen x_0 konvergieren. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Funktion $(f+g)$ konvergiert gegen $y_0 + z_0$ für x gegen x_0.

(2) Es seien zusätzlich Z ein normierter Raum, $B \subset Y$ mit $f(A) \subset B$ und $h : B \to Z$ so, dass $y_0 \in B$. Konvergiert h gegen w_0 für y gegen y_0, so konvergiert $h \circ f$ gegen w_0 für x gegen x_0.

Ist insbesondere $X = Y = \mathbb{K}$, so gilt auch:

(3) Die Funktion $f \cdot g$ konvergiert gegen $y_0 z_0$ für x gegen x_0.

(4) Ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einer ε-Umgebung von x_0 und ist $z_0 \neq 0$, so konvergiert die Funktion $\frac{f}{g}$ gegen $\frac{y_0}{z_0}$ für x gegen x_0.

BEWEIS. (1) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es δ_1, δ_2 so, dass $|f(x) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|g(x) - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta_1$ bzw. $|x - x_0| < \delta_2$. Es sei nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, so gilt

$$|(f+g)(x) - (y_0 + z_0)| \leq |f(x) - y_0| + |g(x) - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle x so, dass $|x - x_0| < \delta$.

(2) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es η_1 so, dass $|h(y) - w_0| < \varepsilon$ für alle $y \in B$ mit $|y - y_0| < \eta_1$. Es sei zusätzlich $\eta_2 > 0$ so, dass die Umgebung $U_{\eta_2}(y_0) \subset B$ und setze $\eta := \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Zu diesem η gibt es nun $\delta > 0$, so dass $f(x) \in B$ und $|f(x) - y_0| < \eta$ für alle $x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$. Insgesamt gilt für alle $x \in A$ so, dass $|x - x_0| < \delta$, auch $|f(x) - y_0| < \eta$ und somit $|(h \circ f)(x) - w_0| = |h(f(x)) - w_0| < \varepsilon$. □

ÜBUNGSAUFGABE 7.16. Führe den Beweis vom Satz rrk 7.15.(3)–(4) durch.

zistenfunkt SATZ 7.17. *Es seien X ein normierter Raum, $A \subset X$, $f, h : A \to \mathbb{R}$ drei Funktionen. Es seien $x_0 \in X$ und $y \in \mathbb{R}$, für die*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = y.$$

Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y$$

für jede weitere Funktion $g : A \to \mathbb{R}$, für die

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{für alle } x \in A$$

gilt.

BEWEIS. Es sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass

$$x \in U_{\delta_1}(x_0) \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\epsilon(y),$$

und

$$x \in U_{\delta_2}(x_0) \cap A \quad \Rightarrow \quad h(x) \in U_\epsilon(y).$$

Betrachte nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, so dass

$$U_\delta(x_0) \cap A \subset (U_{\delta_1}(x_0) \cap A) \cap (U_{\delta_2}(x_0) \cap A).$$

Dann ist für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap A$

$$y - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq y + \epsilon,$$

und somit

$$-\epsilon < g(x) - y \leq \epsilon,$$

was den Beweis erbracht. □

ÜBUNGSAUFGABE 7.18. Bestimme

(1) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \frac{1}{x-1} \right)$;

(2) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$, in Abhängigkeit von $n, m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$.

7.1. Elemente der Topologie

abge DEFINITION 7.19. *Es sei X ein normierter Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* ***abgeschlossen****, falls der Grenzwert jeder konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ ebenfalls in A liegt.*

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt ***offen****, falls ihr Komplement A^C abgeschlossen ist.*

abschluss DEFINITION 7.20. *Es sei X ein normierter Raum. Es sei $A \subset X$. Dann ist der* ***Abschluss*** *von A die Menge $\overline{A} \subset X$, so dass*

- *$\overline{A}$ abgeschlossen ist,*
- *$A \subset \overline{A}$, und*
- *$\overline{A} \subset B$ für jede abgeschlossene Menge B, die A enthält.*

Die mathematische Theorie der offenen und abgeschlossenen Mengen heißt *Topologie*. Wir werden sie nur skizzieren. Normierte Räume sind nur ein sehr spezieller Fall sogenannter *topologischer Räume*, in denen die meisten topologischen Begriffe leichter untersucht werden können.

umglemma LEMMA 7.21. *Es seien X ein normierter Raum und $A \subset X$. Genau dann ist A offen, wenn es für alle $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(x) \subset A$.*

BEWEIS. Es sei A offen und $x \in A$. Gelte die Aussage nicht, dann gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$ aber $x_n \notin A$. Diese Folge ist offensichtlich gegen x konvergent. Da A^C abgeschlossen ist, ist aber ihr Grenzwert x ebenfalls in A^C, ein Widerspruch.

Es sei nun A nicht offen. Somit ist A^C nicht abgeschlossen, d.h., es gibt eine Konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^C$, deren Grenzwert x *nicht* in A^C liegt – und deshalb ist $x \in A$. Also hat man bewiesen, dass es $x \in A$ gibt, so dass $U_{\frac{1}{n}}(x) \setminus A \neq \emptyset$ für alle n groß genug, da – eventuell durch Betrachtung einer Teilfolge – man annehmen darf, dass $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$. □

ANMERKUNG 7.22. Es sollte schon aus der Definition abge 7.19 klar sein, aber besser ist es dies explizit zu bekräftigen.

- *Eine Menge kann gleichzeitig offen und abgeschlossen sein.*
- *Eine nichtoffene Menge kann abgeschlossen sein, muss aber nicht.*
- *Eine nichtabgeschlossene Menge kann offen sein, muss aber nicht.*

Zum Beispiel erfüllen sowohl die leere Menge als auch $\mathbb{R}^d$ offensichtlich die Definition einer abgeschlossener Menge und sind somit beide sowohl offen als auch abgeschlossen. Das Intervall $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ ist jedoch weder offen noch abgeschlossen.

umgebopen BEISPIEL 7.23. Es sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ ist offen und wird deshalb oft auch **offene Kugel** mit Radius ε und Zentrum x. Es sei nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, deren Glieder in dem Komplement von $U_\varepsilon(x_0)$ liegen. Nimm an, ihr Grenzwert $\tilde{x}$ liegt jedoch in $U_\varepsilon(x_0)$, also $\|\tilde{x} - x_0\| < \varepsilon$ und somit existiert $\tilde{\varepsilon}$ mit $U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset U_\varepsilon(x_0)$. Nach Definition von Grenzwert gibt es dann $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|\tilde{x} - x_n\| < \tilde{\varepsilon}$. d.h., so dass $x_n \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) \subset U_\varepsilon(x_0)$ für alle $n \geq N$. Somit liegt aber x_n für $n \geq N$ in der Menge $U_\varepsilon(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass x_n nach Voraussetzung in dem Komplement von $U_\varepsilon(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt. Eine ε-Umgebung ist auch nicht abgeschlossen: warum? □

kugele BEISPIEL 7.24. Es sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$. Der Abschluss der ε-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ ist die Menge

$$B_\varepsilon(x_0) := \{y \in X : \|x_0 - y\| \leq \varepsilon\}.$$

Diese Menge heißt **abgeschlossene Kugel** mit Radius ε und Zentrum x_0.

ntervalopen

Beispiel 7.25. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a < b$. Dann ist das offene Intervall (a, b) *offen im Sinne der Definition* 7.19. Nämlich kann man (a, b) als 1-dimensionale Umgebung $U_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$ darstellen, und somit folgt die Aussage aus Beispiel 7.23. Auch gilt: jedes offene unbeschränkte Interval in $\mathbb{R}$ ist *offen im Sinne der Definition* 7.19. □

interopen

Übungsaufgabe 7.26. Zeige:

(1) Die Vereinigung unendlich vieler offenen Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge der Elementen, die zu jeder Menge M_i gehören, ist offen.
(2) Der Durschnitt endlich vieler offenen Mengen $M_1, \ldots, M_N$, d.h. die Menge der Elementen, die mindestens zu einer Menge M_i gehören, ist offen.
(3) Es gibt eine unendliche Familie offener Mengen, deren Durchschnitt nicht offen ist.

interabge

Übungsaufgabe 7.27. Zeige:

(1) Der Durchschnitt unendlich vieler abgeschlossenen Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge der Elementen, die mindestens einer Menge M_i gehören, ist abgeschlossen.
(2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen $M_1, \ldots, M_N$, d.h. die Menge der Elementen, die jeder Menge M_i gehören, ist abgeschlossen.
(3) Es gibt unendlich viele abgeschlossene Mengen, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Übungsaufgabe 7.28. Es sei X ein normierter Raum und Y ein Unterraum von Y. Man kann immer Y als nomierter Raum versehen, indem man die Norm von X auf Y einschränkt. Zeige: Ist X ein Banachraum und Y ein abgeschlossener Unterraum von X (d.h., abgeschlossen als Teilmenge von X), dann ist Y auch ein Banachraum.

Übungsaufgabe 7.29. Zeige, dass der in der Definition 3.15 eingeführte Begriff von Abgeschlossenheit mit dem gerade definierten Begriff übereinstimmt.

Beispiel 7.30. Wir haben schon angemerkt, dass jede (beschränktes oder unbeschränktes) abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist. Die Umkehrrichtung gilt nicht, wie die Beispiele der Mengen $[0, 1] \cup [2, 3]$ zeigt oder $\mathbb{Q}$ zeigen (warum sind sie abgeschlossen?). □

Beispiel 7.31. Die Menge M aus Beispiel 4.12 ist abgeschlossen. Es sei $(x_{1n}, x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ konvergente Folge, deren Glieder in M liegen. Es gilt also $x_{1n} \geq 0$, $x_{2n} \geq 0$ und $x_{1n}^2 + x_{2n}^2 \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da alle Glieder x_{1n} und x_{2n} positiv sind, müssen auch $\tilde{x_1}, \tilde{x_2}$ positiv sein: Damit sie beliebig nah an $(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})$ rankommen würden sonst (etwa wie im obigen Beispiel) unendlich viele Folgenglieder $x_{1n} < 0$ und $x_{2n} < 0$ erfüllen, ein Widerspruch. Es sei $\tilde{x_1}^2 + \tilde{x_2}^2 = 1 + \varepsilon$, so gibt es nach Definition von Grenzwert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\tilde{x_1} - x_{1n}\| - \|\tilde{x_2} - x_{2n}\| \leq \|(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) - (x_{1n}, x_{2n})\|^2 = (\tilde{x_1} - x_{1n})^2 + (\tilde{x_2} - x_{2n})^2 < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit notwendigerweise ${x_{1n}}^2 + {x_{2n}}^2 > 1$, ein Widerspruch zur Annahme, dass $(x_{1n}, x_{2n}) \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Übungsaufgabe 7.32. Zeige: Die Menge aus Beispiel 4.13 ist abgeschlossen.

Anmerkung 7.33. Obwohl die algebraische Struktur von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ unterschiedlich sind, ist die Norm eines Elements in beiden Räumen gleich definiert. Somit sind die *topologischen* Eigenschaften von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ gleich: genauer gesagt ist jede Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ genau dann beschränkt/abgeschlossen/offen, wenn $\tilde{A} := \{(\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x) \in \mathbb{C} : (x_1, x_2) := (\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x) \in A\}$ beschränkt/abgeschlossen/offen ist.

7.2. Stetigkeit

epsilond

Definition 7.34. *Es seien X, Y normierte Räume, $A \subset X$ und $x_0 \in A$. Dann heißt eine Funktion $f : A \to Y$* ***in*** *x_0* ***stetig****, falls sie gegen $f(x_0)$ für x gegen x_0 konvergiert. Sie heißt* ***in*** *A* ***stetig*** *(oder einfach* ***stetig****), falls sie in jedem $x_0 \in A$ stetig ist.*

Anmerkung 7.35. Anders gesagt, nach Definition vom Grenzwert: $f : A \to Y$ heißt stetig, falls für alle $x_0 \in X$ und alle $\epsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\epsilon(f(x_0)).$$

Anmerkung 7.36. Eine besonders interessante Klasse von stetigen Funktionen bilden diejenigen von der Form

$$f : X \to \mathbb{R}.$$

Aus historischen Gründen spricht man dabei von stetigen *Funktionalen*. Sie bilden einen der Kerne der sogenannten *Funktionalanalysis.*

Satz 7.37. *Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Eine Funktion $f : A \to Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y unter f offen ist.*

Beweis. Es sei U offen und $x \in f^{-1}(U)$. Da $f(x) \in U$, und U offen ist, gibt es laut Lemma 7.21 ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(f(x)) \subset U$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f dank Lemma 7.21 die Existenz eines $\delta > 0$, für das

$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \quad \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(f(x_0)),$$

d.h.,

$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \quad \Rightarrow x \in f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(U),$$

wie wir zeigen wollten.

Es sei umgekehrt das Urbild jeder offenen Menge unter f offen, und betrachte $x_0 \in A$ und $\epsilon > 0$. Dann ist $f(x_0) \in Y$. Da laut Lemma 7.21 $U_\epsilon(f(x_0))$ in Y offen ist, ist sein Urbild unter f auch offen, d.h., für jedes Element aus $f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$ gibt es $\delta > 0$ so, dass die δ-Umgebung dieses Elements in $f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$ liegt. Insbesondere gibt es für x_0 ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \cap A \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$, und somit $f(U_\delta(x_0) \cap A) \subset U_\epsilon(f(x_0))$.

Anders gesagt: für alle $x_0 \in A$ und alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass

$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\epsilon(f(x_0)).$$

Das vollendet den Beweis. □

Übungsaufgabe 7.38. Zeige das folgende Korollar vom Satz 7.37: Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Eine Funktion $f : A \to Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenene Teilmenge von Y unter f abgeschlossenen ist.

Nach Definition von Stetigkeit einer Funktion sowie den Rechenregeln aus Satz 7.15, kann man die folgenden unmittelbar beweisen.

Satz 7.39 (Rechenregel für stetige Funktionen). *Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to Y$, welche in $x_0 \in A$ stetig sind. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Funktion $(f + g)$ ist in x_0 stetig.
(2) Es seien zusätzlich Z ein normierter Raum und $\eta > 0$ so, dass $f(A) \subset U_\eta(f(x_0))$ ist. Ist $h : U_\eta(f(x_0)) \to \mathbb{C}$ in $f(x_0)$ stetig, so ist die Funktion $h \circ f$ in x_0 stetig.
Ist insbesondere $X = Y = \mathbb{K}$, so gilt auch:
(3) Die Funktion $(f \cdot g)$ ist in x_0 stetig.
(4) Ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einer ε-Umgebung von x_0, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.

Anmerkung 7.40. Insbesondere bildet $C(X, Y)$, die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y einen Vektorraum.

Übungsaufgabe 7.41. Es sei X ein normierter Raum. Zeige: $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion und folgere aus der Stetigkeit einer Funktion f auch die Stetigkeit von $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$.

Anmerkung 7.42. Vorsicht! Während jede Summe und jedes Produkt zweier stetigen Funktionen stetig (vgl. Satz 7.39.(2)) ist, kann das Produkt zweier unstetigen Funktionen auch stetig sein: betrachte z.B. die Dirichletfunktion D aus dem Beispiel 7.58. Dann sind D und offensichtlich auch $1-D : x \mapsto 1-D(x)$ unstetig, doch sind $D+(1-D)$ sowie $D(1-D)$ stetig: die erste ist die Funktion mit konstantem Wert 1, die zweite ist die Funktion mit konstantem Wert 0. Sie sind somit auf $\mathbb{R}$ stetig.

potstet

Beispiel 7.43. Es folgt aus dem Beispiel 7.47 und dem Satz 7.39.(2), dass auch die Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist. Allgemeiner folgt aus den obigen Rechenregeln: für alle $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ definiert das Polynom $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ vom Grad n eine auf $\mathbb{C}$ stetige Funktion. Weiter gilt: für alle $\beta_0, \ldots, \beta_m$ ist die sogenannte *rationale Funktion*

$$x \mapsto \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n}{\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m}$$

auf $\mathbb{C}\backslash D$ stetig, wobei D die Vereiningung der (höchstens m) komplexen Nullstellen des Polynoms $\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$ ist, welche nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren. Dabei darf $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden. □

Beispiel 7.44. Aus den obigen Rechenregeln folgt, dass aus der Stetigkeit einer komplexwertigen Funktion f auch die Stetigkeit von $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ folgt.

Noch allgemeiner als rationale Funktionen kann man den folgenden Begriff einführen.

Beispiel 7.45. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein *Multiindex der Länge* $|\alpha|$, d.h., $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j$ (man nennt $|\alpha|$ die *Länge* von α). Definiere für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ die *Potenz* $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{K}$.

Es seien nun $k \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \in \mathbb{K}$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Dann heißt jedes

$$P : \mathbb{K}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}$$

ein *multivariates Polynom* vom Grad $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus dem Satz 7.15 f und alle ihre partielle Ableitungen stetig sind.

1ton

Anmerkung 7.46. Es sei f eine Funktion mehreren Variablen, welche aber nur von einer Variable x_{n_0} explizit abhängt, wie z.B. die Funktion $f : (x,y) \mapsto 2y$. Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn nur ihre Abhängigkeit von x_{n_0} stetig ist.

Betrachte nun eine Funktion g von n Variablen, welche sich als Summe, Produkt oder Verkettung von n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *einer* Variablen darstellen lässt, wie z.B. $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$. Sind dann alle Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stetig, so ist auch f stetig.

identste

Beispiel 7.47. Laut Beispiel 7.5 ist die identische Funktion stetig $x \mapsto x$ auf $\mathbb{C}$. □

Beispiel 7.48. Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Laut Beispiel 7.6 ist die konstante Funktion $x \mapsto \alpha$ stetig auf $\mathbb{C}$. □

Übungsaufgabe 7.49. Zeige: Ist eine Funktion f in A stetig, so ist sie auch in jeder Teilmenge $\tilde{A}$ von A stetig.

Übungsaufgabe 7.50. Es sei X ein normierter Raum. Zeige: Eine $\mathbb{K}$-wertige Folge, d.h. eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ mit abzählbarer Definitionsmenge, ist immer stetig.

Übungsaufgabe 7.51. Betrachte die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{falls } x \neq 1, \\ 3 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktion auf $\mathbb{R}$ nicht stetig ist. Kann man die Definition der Funktion in $x = 1$ so ändern, dass die dementsprechend modifizierte Funktion stetig auf $\mathbb{R}$ wird?

Beispiel 7.52. Es sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und betrachte die sog. **charakteristische Funktion von** A, d.h. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(x) = 1$ falls $x \in A$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann ist f in $a := \sup\ A$ unstetig. Denn für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und alle $\delta > 0$ gilt wenn $a \in A$ (bzw. wenn $a \notin A$)

$$|f(a) - f(y)| = 1 > \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } y \in (a, a+\delta) \text{ (bzw. für alle } y \in (a-\delta, a)).$$

Ähnlich zeigt man, dass f auch in $b := \inf\ A$ unstetig ist. □

Übungsaufgabe 7.53. Betrachte die Funktion f, die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y = 0, \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert wird. Zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist, und dass jedoch $f(\cdot, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ stetig ist, sowie $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 7.54. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2}{2}$$

definiert wird, konvergiert gegen $\frac{y_1 y_2}{2}$ für (x_1, x_2) gegen jedes (y_1, y_2). So liefert $f(x_1, x_2)$ bekanntlich den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn man mit x_1, x_2 die Länge seiner Katheten bezeichnet. Diese Funktion ist also stetig. □

Beispiel 7.55. Die sogenannte *Zustandsgleichung* ist das Gesetz, welches das Volumen V eines idealen Gases in Abhängigkeit von Druck p, Masse m und Temperatur T beschreibt. Sie lautet

$$V(p, m, T) = R\frac{mT}{p},$$

wobei $R \simeq 8{,}314472$ die universelle Gaskonstante ist. Laut Anmerkung 1ton 7.46 ist diese Funktion stetig. □

Im folgendem Satz wird eine wichtige äquivalente Bedingung für die Stetigkeit einer Funktion formuliert.

folgenstet

Satz 7.56. *Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. So ist $f : A \to Y$ 2 genau dann in $x_0 \in A$ stetig, wenn für* jede *gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.*

Beweis. Es sei $x_0 \in A$ und $f : A \to Y$. Nach Definition ist f in x_0 stetig, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x_0)$ und das ist nach Satz folgestetsatz 7.13 genau dann der Fall, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Glieder in A liegen, auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. □

Übungsaufgabe 7.57. Formuliere ein Gegenstuck des Cauchyschen Konvergenzkriteriums für die Konvergenz von Funktionen.

Das obige Kriterium läßt sich kaum im *positiven* Beweisen der Stetigkeit einer Funktion anwenden, doch ist es sehr geeignet, um zu überprüfen, dass eine Funktion *nicht* stetig ist.

dirichfkt

Beispiel 7.58. Definiere die sogenannte **Dirichletfunktion** $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

Sowohl $\mathbb{Q}$ als ihr Komplement in $\mathbb{R}$ sind unendliche Mengen, doch sind wie bereits bekannt die irrationalen Zahlen „mehr“ als die rationalen, denn $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Menge. Möchte man also den Graph von D skizzieren sollte man der Funktion D unendlich oft den Wert 1 zuordnen, doch nur in der „absoluten Minderheit“ der Stellen im Definitionsbereich. Ist D stetig? Nein, D ist nicht stetig, und sogar stetig in *keinem* Element ihres Definitionsbereichs: denn man kann jede Zahl x mit (mindestens) zwei verschiedenen Folgen annähern, welche jeweils aus nur rationalen bzw. nur irrationalen Zahlen bestehen. In deren Folgenglieder ausgewertet wäre dann die Funktion D identisch 1 bzw. 0 und würde somit auch gegen 1 bzw. 0 konvergieren, was der Bedingung in Satz folgenstet 7.56 widerspricht.

Die Funktion D wird oft *Dirichletfunktion* nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet genannt.

Eine Variante der Dirichletfunktion ist die sogenannte *Popcorn-Funktion* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche von Carl Johannes Thomae eingeführt wurde. Sie wird durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ in gekürzter Form,} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

definiert. Man kann zeigen, dass P in jeder irrationaler Zahl unstetig und in jeder rationaler Zahl stetig ist.

(Umgekehrt kann es keine Funktion geben, welche in jeder rationaler Zahl unstetig und in jeder irrationaler Zahl stetig ist.) □

In Definition expotenzfunkt 6.47 haben wir bereits die komplexe Exponentialfunktion eingeführt, mittels der auch die trigonometrischen und hyperbolische Funktionen definiert werden können, vgl. Beispiel trigon 6.58. Nun zeigen wir, dass sie stetig ist.

expstet SATZ 7.59. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

BEWEIS. Wir werden erst zeigen, dass exp in 0 stetig ist, und werden dann den allgemeinen Fall betrachten. Wir merken zuerst, dass nach Definition

$$\begin{aligned} |e^z - 1| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\ &\leq |z| \sum_{k=1} \frac{|z^{k-1}|}{k!} \leq |z| \sum_{k=1} \frac{|z|^{k-1}}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt wohl $|\exp(z) - \exp(0)| \leq |z| \exp(1)$. Aus dem Satz polizistenfunkt 7.17 folgt nun, dass $\lim_{z\to 0} |\exp(z) - \exp(0)| = 0$, also $\lim_{z\to 0} \exp(z) = \exp(0)$ und exp ist in 0 stetig.
Es sei nun $w \in \mathbb{C}$ und betrachte eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jede gegen w konvergente Folge ist tatsächlich von der Form $(w + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist dank (funexp 6.4) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion in 0

$$\lim_{n\to\infty} \exp(w + x_n) = \exp(w) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(w) \exp(0) = \exp(w),$$

also ist exp auch in w stetig. □

BEISPIEL 7.60. Zur Erinnerung: Die komplexen trigonometrischen Funktionen cos, sin werden durch

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \qquad \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Es ist unmittelbar klar, dass die Abbildung $z \mapsto iz$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist, und somit auch ihre Verkettung $z \mapsto \exp(iz)$ mit der Exponentialfunktion. Schließlich folgt aus der Rechenregel im Satz rrs 7.39.(1), dass auch cos und sin auf $\mathbb{C}$ stetig sind. Wie im Beispiel trigon 6.58 erklärt stimmen die komplexen mit den üblichen, geometrisch motivierten (reellen) trigonometrischen Funktionen überein, falls das Argument z reell ist. □

ANMERKUNG 7.61. Ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion stetig? Im Allgemeinem nicht. Ein Gegenbeispiel erhält man, indem die Funktion $f : (0, 1) \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ betrachtet wird, wobei

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in (0, 1), \\ x - 1 & \text{falls } x \in [2, 3). \end{cases}$$

Die Funktion ist in jeder der beiden Teilmengen ihres Definitionsbereiches stetig, da eine gegen 2 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Glieder im Definitionsbereich von f liegen notwendigerweise aus Elemente von $[2, 3)$ besteht, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - 1 = -1 + \lim_{n\to\infty} x_n = -1 + 2 = 1$. Also ist das Bild von f die Menge $(0,2)$ und die Umkehrfunktion ist durch

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in (0,1), \\ x+1 & \text{falls } x \in [1,2), \end{cases}$$

sodass sie in 1 unstetig ist.

Anmerkung 7.62. Die Definition der Stetigkeit durch ε und δ gilt für viele als der Inbegriff der mathematischen Pingelichkeit. Doch gibt es gute Gründe für die obige Definition: obwohl fast alle übliche Funktionen, welche durch ein analytisches Gesetz hingeschrieben werden können, stetig sind, ist von Jean-Baptiste Joseph Fourier beachtet worden, dass es Beispiele von Funktionen gibt, die über eine Reihe definiert werden und doch unstetig sind. Die Definition 7.34 geht auf Bernard Bolzano zurück, der sie 1817 eingeführt hat. Eine äquivalente Formulierung wurde aber im Satz 7.56 vorgestellt, s. auch [**2**, § VI.4].

Auch die empirische Definition, *der Graph einer stetigen Funktion soll keinen Sprung entahlten*, ist manchmal irreführend: tatsächlich ist jede Funktion stetig, deren Graph sprungfrei ist – doch gibt es nicht immer eine treue graphische Darstellung der Funktion, vgl. Beispiel 7.58. Zwei weitere Beispiele liefern z.B. die Funktionen

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$g : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

welche in der Nähe von $x = 0$ so schnell oszillieren, dass das genaue Plotten unmöglich wird. In der Tat ist die Funktion f in 0 unstetig, die Funktion g jedoch in 0 stetig.

Die folgende Aussage formalisiert schließlich die Vorstellung, bei dem Graph einer stetigen Funktion lägen keine Sprunge vor, d.h. ihr Wertebereich sei lückenfrei. Sie wurde 1817 von Bernhard Bolzano bewiesen und wird **Zwischenwertsatz** genannt.

zwischen Satz 7.63. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.*

Beweis. Es sei o.B.d.A. $f(a) \le f(b)$ (sonst läuft der Beweis im Wesentlichem gleich) und betrachte $\gamma \in [f(a), f(b)]$: Man will zeigen, dass ein $x \in [a,b]$ existiert, mit $f(x) = \gamma$. Definiere rekursiv zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ und $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze z.B. $a_0 = a$ und $b_0 = b$. Nun betrachten wir die Stelle $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Ist $f(c_0) \le \gamma$, so setze $a_1 = c_0$ und $b_1 = b_0$, andernfalls $a_1 = a_0$ und $b_1 = c_0$. Dann betrachtet man die Stelle $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ und verfährt genauso um a_2, b_2 zu konstruieren, usw. Dadurch werden wohl zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert. Dabei gilt stets, dass $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$.

Da die Länge $b_n - a_n$ des Intervalls $[a_n, b_n]$ gegen 0 konvergiert, muss laut Satz 4.43 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: x$ gelten, und somit wegen der Stetigkeit von f und des Satzes 7.56 auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) =: f(x)$. Da stets Intervall $f(a_n) \le \gamma \le f(b_n)$ gilt, folgt wegen des Sandwichsatzes $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \gamma = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Somit ist $f(x) = \gamma$. □

Anmerkung 7.64. Die im Beweis vom Satz 7.63 angewandte Methode heißt Bisektionsverfahren. Sie erlaubt die algorithmische Bestimmung von Nullstellen von beliebingen stetigen Funktionen. Hat eine Funktion zusätzliche Eigenschaften, so kann man effizientere numerische Schemata benutzen, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden.

Korollar 7.65. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(A)$ ein Intervall.*

Beweis. Es seien
$$\alpha := \inf f(A) \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \beta := \sup f(A) \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Da definitionsgemäß $A \neq \emptyset$ und somit $f(A) \neq \emptyset$, ist $\alpha \neq +\infty$ und $\beta \neq -\infty$. Wir wollen nun zeigen, dass $(\alpha, \beta) \subset f(A)$: Es sei $y \in (\alpha, \beta)$. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $f(a) < y < f(b)$, und nach dem Zwischenwertsatz gilt $f(x) = y$ für mindestens ein $x \in A$ – somit ist $y \in f(A)$. Nun kann $f(A)$ nur (α, β), $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ oder $[\alpha, \beta]$ sein. □

Übungsaufgabe 7.66. Es sei $a > 0$. Folgere aus dem Zwischenwertsatz die Existenz einer n-ten Wurzel von a.

Satz 7.67. *Die Einschränkung der Exponentialfunktion ist bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$.*

Beweis. Da die Funktion exp streng monoton ist, ist sie notwendigerweise injektiv. Um zu zeigen, dass sie auch surjektiv ist, sei $y > 0$ und betrachte die Fälle $y \geq 1$ und $y < 1$. Ist $y \geq 1$, so gilt $\exp(0) = 1$ und $\exp(y) = 1 + y + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^k}{k!} > 1 + y$, also liefert der Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(x) = y$. Ist nun $0 < y < 1$, so folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktion und der Tatsache, dass $\exp(0) = 1$, dass ein solches $\tilde{x}$ notwendigerweise $\tilde{x} < 0$ erfüllen soll. Es ist $y^{-1} > 1$ und somit gibt es $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(\tilde{x}) = y^{-1}$. Nach (6.4) ist dann $y = \exp(\tilde{x})^{-1} = \exp(\tilde{x}^{-1})$. □

Anmerkung 7.68. Aus der Bijektivität der reellen Exponentialfunktion folgt unmittelbar die Existenz einer Umkehrfunktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, also einer Funktion log so, dass
$$x = \log(y) \qquad \text{falls} \qquad y = \exp(x).$$
Diese Funktion wird *natürlicher Logarithmus*, oder einfach *Logarithmus*, genannt. Die folgenden Eigenschaften sind unmittelbare Konsequenzen der Definition des Logarithmus bzw. der Exponentialfunktion:

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$;
- $\log(x^p) = p \log(x)$ für alle $x > 0$ und $p \in \mathbb{Q}$;
- log ist auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend;
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$.

Insbesondere besagt dieser Grenzwert, dass die Logarithmusfunktion *langsamer* als jede Potenz wächst. Darüber hinaus folgt aus dem Satz 7.69, dass die Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$ stetig ist.
Es ist möglich, eine komplexe Erweiterung der Logarithmusfunktion zu definieren: Dies wird aber erst in der Funktionentheorie durchgeführt.

stetinv Satz 7.69. *Es seien $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : A \to R$ eine streng monotone wachsende (bzw. fallende), stetige Funktion. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ von f streng monotone wachsende (bzw. fallende) und stetig.*

Beweis. Da f streng monoton ist, ist es offensichtlich auch injektiv, und somit bijektiv wenn man sie seine Zielmenge mit seiner Bildmenge ersetzt. Somit ist $f : A \to f(A)$ bijektiv. Die strenge monotonie zu Überprüfen wird als leichte Übungsaufgabe überlassen.

Um die Stetigkeit von f^{-1} zu beweisen, nimm an, f sei streng monoton *wachsend* (falls es fallend ist, ist der Beweis analog). Um zu zeigen, dass f^{-1} an der Stelle b stetig ist, betrachte $b \in f(A)$ und $\epsilon > 0$ und setze $a := f^{-1}(b) \in A$. Liegt $U_\epsilon(a)$ innerhalb A, d.h. $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$, dann gilt (aufgrund der Monotonie von f und vom Satz 7.63) dass $f\big((a - \epsilon, a + \epsilon)\big) = \big(f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)\big)$. Dann gilt für $\delta := \min\{b - b_1, b_2 - b\}$, dass
$$f^{-1}\left(U_\delta(b)\right) \subset U_\epsilon(a),$$
d.h.: aus $x \in U_\delta(b)$ folgt, dass $f(x) \in U_\epsilon(a)$ ist.

Ist jedoch $U_\epsilon(a) \not\subset A$ für jedes $\epsilon > 0$, d.h., ist a Endpunkt von A, dann ist (wegen Monotonie) $f(a)$ auch Endpunkt von $f(A)$. Den obigen Beweis kann man reproduzieren, indem man $[a, a + \epsilon)$ bzw. $(a - \epsilon, a]$ statt $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ betrachte (Details werden als Übungsaufgabe überlassen). □

Somit ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ bijektiv von $(0,\infty)$ nach $(0,\infty)$. Sie ist stetig nach Beispiel potstet 7.43 und somit ist laut Satz stetinv 7.69 auch ihre Umkehrfunktion stetig.

LEMMA 7.70. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und es sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann gibt es $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$.*

Man sagt, dass x_0 ein **Fixpunkt** von f ist und somit heißt dieser ein **Fixpunktsatz**.

ÜBUNGSAUFGABE 7.71. Beweise den obigen Fixpunktsatz. *(Hinweis: Betrachte die Funktion $g : [0,1] \ni x \mapsto f(x) - x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass g eine Nullstelle hat.)*

ÜBUNGSAUFGABE 7.72. Nimm an, die Temperatur auf der Erde wird in jedem Zeitpunkt von einer stetigen Funktion beschrieben. Bezeichne also mit $f(\theta)$ die Temperatur im Punkt auf dem Äquator mit geographischer Länge $\theta \in [-180, 180]$. Aufgrund der Stetigkeit ist $f(-180) = f(180)$. Zeige, dass es mindestens zwei Punkten auf dem Äquator gibt, die gleiche Temperatur haben.

ANMERKUNG 7.73. Es sei $a > 0$. Man definiert die **Exponentialfunktion zur Basis** a durch $\exp_a(z) := \exp(z\log(a))$, $z \in \mathbb{C}$, und schreibt manchmal auch a^z für $\exp_a(z)$. Folgende Eigenschaften gelten:

- Die Exponentialfunktionen sind stetig: Weil $\log(a)$ konstant ist, ist $g : z \mapsto z\log(a)$ stetig, und somit auch $\exp_a = \exp \circ g$, denn exp ist stetig.
- Die Exponentialfunktionen sind auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) falls $a > 1$ (bzw. $a < 1$). Denn wenn $a > 1$ (bzw. $a < 1$) ist $\log(a) > 0$ (bzw. $\log(a) < 0$), also ist $\exp_a(z) = \exp(z\alpha)$ mit $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$), also folgt die Monotonie aus der Monotonie der Exponentialfunktion exp.
- Es gilt $\exp_a(z+w) = \exp_a(z)\exp_a(w)$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ sowie $\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp_a(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, weil
$$\begin{aligned}\exp_a(z+w) &= \exp((z+w)\log(a)) = \exp(z\log(a) + w\log(a)) \\ &= \exp(z\log(a))\exp(w\log(a)) = \exp_a(z)\exp_a(w)\end{aligned}$$
sowie
$$\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp(y\log\exp_a(x)) = \exp(y\log\exp(x\log(a))) = \exp((yx)\log(a)) = \exp_a(xy).$$
- Es sei $z = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\exp_a(\frac{n}{m}) = \sqrt[m]{a^n}$, weil $\exp_a(\frac{n}{m}) = \exp(\frac{1}{m}n\log(a)) = \exp(n\log(a))^{\frac{1}{m}} = \exp_a(n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\exp_a(n)} = \sqrt[m]{a^n}$ gilt.
- Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Man schreibt $a^z := \exp_a(z)$. Dabei gilt selbstverständlich $\exp_e = \exp$.

ÜBUNGSAUFGABE 7.74. Es sei $f(x) := \frac{x^x}{e^x}$. Bestimme den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to 0$.

cauchyexp ÜBUNGSAUFGABE 7.75. a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = e$, die stetig in 0 ist, und $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige

(i) $f(0) = 1$.
(ii) $f(nx) = f(x)^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(r) = e^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.
(iv) f ist stetig auf $\mathbb{R}$.
(v) $f(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige: Es gibt $c > 0$, so dass $f(x) = c\exp(x)$.

Da laut Satz expstet 7.59 exp eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, folgt unmittelbar dank den Rechenregeln, dass auch die trigonometrischen Funktionen cos und sin sowie ihr Quotient tan stetig sind.

trigon2 Beispiel 7.76. Man sieht wie für die Exponentialfunktion, dass auch die Einschränkungen von sin und cos auf $\mathbb{R}$ reellwertig sind. Man kann sogar zeigen, dass die Einschränkungen $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ sowie $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und somit injektiv sind. Dank dem Zwischenwertsatz folgt schließlich, dass $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ sowie $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ auch surjektiv sind. Somit sind sie bijektiv und invertierbar: ihre Umkehrfunktion nennt man *Arcussinus* (arcsin) bzw. *Arcuscosinus* (arccos). Auch die Funktion *Tangens*, welche durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

definiert wird, ist bijektiv und somit invertierbar: ihre Umkehrfunktion heißt *Arcustangens* und wird durch arctan bezeichnet. □

Betrachte einen Kreis mit Radius 1, also die Menge $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Wir haben schon angemerkt, dass die mittels Exponentialfunktionen definierten $\sin(\phi)$ bzw. $\cos(\phi)$ den Koordinaten des Punktes (x, y) entsprechen, so dass die Länge des Bogens zwischen $(1, 0)$ und (x, y) genau ϕ ist. Man kann eine ähnliche Konstruktion auch für eine Parabel wiederholen, also für die Menge $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$. Dies führt zur Einführung der sog. *Hyperbelfunktionen*.

Definition 7.77. *Die Funktionen* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *sowie* $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *werden durch*

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \textit{und} \quad \tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \qquad z \in \mathbb{R},$$

definiert.

Übungsaufgabe 7.78. a) Zeige, dass die Funktionen cosh und sinh stetig auf $\mathbb{C}$ sind. Bestimme einen Definitionsbereich, auf dem tanh stetig wird.
b) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sinh(x + y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y),$$
$$\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

c) Zeige: Die Einschränkungen von $\cosh, \sinh, \tanh$ auf $\mathbb{R}$ sind reellwertige Funktionen; sinh und tanh sind auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, wobei cosh ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Übungsaufgabe 7.79. *[...] So tabellierte um 1325 Nahm al-Dīm al-Misri in Kairo eine Funktion mit drei Variablen,* $f(x, y, z)$ *[...] Die Tabelle berechnete die Zeit seit dem Aufgang der Sonne oder irgendeines Sternes.* x *zeigt die Mittagshöhe der Sonne oder die maximale Gestirnshöhe an,* y *die augenblickliche Höhe und* z *die halbe Länge des Tageslichts oder den Halbkreis, in dem ein Stern sichtbar ist. Die zugrunde liegende Funktion lautet:*

$$f(x, y, z) = z - \operatorname{arcvers}\left(\operatorname{vers} z \left(\frac{1 - \sin(y)}{\sin(x)}\right)\right).$$

Die Funktion vers *wird dabei durch* $\operatorname{vers}\theta = 1 - \cos\theta$ *definiert*[1].
(Aus: David King, *Astronomie und Mathematik als Gottesdienst: Das Beispiel Islam*, in Jochen Brüning und Eberhard Knobloch (Ed.), „Die mathematischen Wurzeln der Kultur – Mathematische Innovationen und ihre kulturellen Folgen", München: Wilhelm Fink Verlag, 2005, pp. 91–123.)

(1) Warum kann man aus einfachsten astronomischen Überlegungen erwarten, dass diese Funktion f stetig ist? Mit welchem Definitionsbereich $A \subset \mathbb{R}^3$?
(2) Zeige mittels Rechenregeln, dass $f : A \to \mathbb{R}$ stetig ist. *(Hinweis: Verwende Anmerkung* 1ton *7.46.)*

[1] arcvers ist wohl die Umkehrfunktion von vers.

Im Rest dieses Kapitels schränken wir uns auf den Fall von reellwertigen Funktionen ein, d.h. auf Funktionen, deren Zielmenge $\mathbb{R}$ (und nicht $\mathbb{C}$) ist. Somit können wir die Anordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ nutzen. Insbesondere können wir folgende einführen.

maximin DEFINITION 7.80. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ und betrachte eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$. Dann heißt x **lokale Maximumstelle** (bzw. **Minimumstelle**) und $f(x)$ **lokales Maximum** (bzw. **Minimum**) von f, falls eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x existiert, so dass $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle $y \in U_\varepsilon(x) \cap A$. Darüber hinaus heißt x **globale Maximumstelle** (bzw. **Minimumstelle**) und $f(x)$ **globales Maximum** (bzw. **Minimum**) von f, falls $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) \leq f(y)$) für alle $y \in A$.*

Anders gesagt heißt y Maximum bzw. Minimum einer Funktion $f : A \to \mathbb{C}$, wenn y Maximum bzw. Minimum ihres Wertebereich ist.

Es ist wichtig zu merken, dass nicht jede Funktion ein Maximum bzw. ein Minimum hat: eine notwendige Bedingung ist wohl, dass ihr Wertebereich nach oben bzw. nach unten beschränkt ist. Selbst wenn er beschränkt ist muss ihr Wertebereich kein Maximum bzw. Minimum haben: z.B. ist die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, welche durch $x \mapsto x^2$ definiert wird, beschränkt, denn ihr Wertebreich ist $[0, 1)$. Dies zeigt, dass sie zwar ein globales Minimum hat (in der Minimumstelle 0), aber kein Maximum (weder lokal noch global): ihr Wertebereich hat in der Tat nur das Supremum, dieser Wert wird aber nirgendwo im Definitionsbereich der Funktion angenommen.

Ein allgemeines Existenzkriterium für Maxima und Minima ist deshalb sehr interessant.

DEFINITION 7.81. *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ heißt **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Man wird in der Topologie sehen, dass Kompaktheit viel allgemeiner definieren kann. Diese allgemeinere Definition stimmt dann mit der Obigen *nur in* $\mathbb{R}^d$ ein. Dort hat man auch die folgende Charakterisierung, die eine Umkehrung des Satzes von Bolzano–Weierstraß darstellt.

kompaktbw LEMMA 7.82. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Hat jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine in A konvergente Teilfolge, so ist A kompakt.*

BEWEIS. Zuerst zeigt man, dass A beschränkt ist. Denn sonst: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x_n \in A$ mit $\|x_n\| \geq n$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann somit keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^d$ haben – und somit keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch.

Die Menge A ist auch abgeschlossen: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Folge, und hat eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen $a \in A$ konvergiert, so muss laut dem Korollar 5.14 notwendigerweise a auch Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein – diese Folge konvergiert somit in A. $\square$

BEISPIEL 7.83. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(\tilde{x})$ ist nicht abgeschlossen: z.B. konvergiert die Folge

$$\left(\tilde{x} + (\varepsilon - \frac{1}{n}, 0, \ldots, 0)\right)_{n \geq \tilde{N}} \quad \text{gegen} \quad (\tilde{x}_1 + \varepsilon, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N) \notin U_\varepsilon(\tilde{x}),$$

wobei $\tilde{N}$ eine natürliche Zahl bezeichnet, die groß genug ist, dass alle Glieder in $U_\varepsilon(\tilde{x})$ liegen. Somit sind ε-Umgebungen auch nicht kompakt. $\square$

infmin ÜBUNGSAUFGABE 7.84. Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so sind ihr Supremum bzw. Infimum auch Maximum bzw. Minimum.

BEISPIEL 7.85. Die Menge aus dem Beispiel 4.12 ist kompakt. Die Menge aus dem Beispiel 4.13 ist nicht kompakt. $\square$

SATZ 7.86. *Es seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $f : A \to \mathbb{R}^n$ für $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sind $A \neq \emptyset$ kompakt und f stetig, dann ist auch $f(A)$ kompakt.*

BEWEIS. Betrachte eine Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Da A kompakt ist, folgt aus dem Satz von Bolzano–Weierstraß, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, die wiederum laut dem Satz 7.13 von f nach eine konvergente Folge abgebildet wird. Laut dem Lemma 7.82 ist die Aussage nun bewiesen. $\square$

weier1 KOROLLAR 7.87. *Es seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $f : A \to \mathbb{R}$ für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sind $A \neq \emptyset$ kompakt und f stetig, dann hat f ein globales Maximum und ein globales Minimum.*

BEWEIS. Als kompakte Menge ist $f(A)$ beschränkt, und somit hat es Infimum und Supremum; da $f(A)$ aber auch abgeschlossen ist, sind in der Tat Infimum bzw. Supremum auch Minimum bzw. Maximum laut Übungsaufgabe infmin 7.84. □

ANMERKUNG 7.88. In vielen Ländern (seltsamerweise nicht in Deutschland) ist dieser unter dem Namen „Satz von Weierstraß", nach Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, bekannt.

ANMERKUNG 7.89. Es seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $f : A \to \mathbb{R}^n$ für $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sind $A \neq \emptyset$ kompakt und f stetig, so hat insbesondere $\|f\|$ ein positives Maximum. Dann ist $C(A;\mathbb{R}^n)$ ein Teilraum des normierten Raumes $B(A;\mathbb{R}^n)$, der im Beispiel Binfty 4.10 eingeführt wurde. Tatsächlich kann man (und wird man, in der Vorlesung Analysis 2) zeigen, dass $B(A;\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum ist; und dass $C(A;\mathbb{R}^n)$ ein *abgeschlossener* Unterraum von $B(A;\mathbb{R}^n)$ ist, und somit selber ein Banachraum.

lipsch ÜBUNGSAUFGABE 7.90. Es seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$. Eine Funktion $f : A \to Y$ heißt *Lipschitzstetig*, falls ein $L > 0$ existiert so, dass

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X \qquad \text{für alle } x, y \in A.$$

Kann man $L = 1$ wählen, so heißt f eine *Kontraktion*. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Jede Lipschitzstetige Funktion ist auch stetig.
(2) Das Funktional $X \ni x \mapsto \|x\|_X \in [0, \infty)$ ist Kontraktiv, für jeden normierten Raum X.

KAPITEL 8

Differentialrechnung von Funktionen einer Variabel

Es sei f eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen. Während die Stetigkeit von f anschaulich bedeutet, dass der Graph von f keinen Sprung enthählt, heißt f *differenzierbar*, wenn ihr Graph keine Knicke zeigt. Wie auch für die Stetigkeit ist diese intuitive Definition leider zu ungenau.

Definition 8.1. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein normierter Raum. Eine Funktion $f : A \to X$ heißt* ***in*** *$x_0 \in A$* ***differenzierbar****, falls der Grenzwert des sogenannten* Differenzenquotient

diffquotx0

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{8.1}$$

existiert, d.h., falls es $\xi \in X$ gibt, mit

diffquotx1

$$\lim_{h\to 0} \| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \xi \| = 0. \tag{8.2}$$

In diesem Fall wird der Grenzwert ξ mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ (Aussprache: „d-f nach d-x“) bezeichnet: $f'(x_0)$ wird auch ***Ableitung von*** *f* ***an der Stelle*** *x_0 genannt.*

Ist f für alle $x_0 \in A$ differenzierbar, so heißt sie einfach ***differenzierbar****. Die Abbildung*

$$f' : A \ni x \mapsto f'(x) \in X$$

heißt ***Ableitung*** *von f.*

Man kann natürlich genau so gut, auch die Ableitungen von Funktionen betrachten, die auf Vereinigungen von Intervalle definiert sind.

Diverse physikalische und geometrische Probleme weisen darauf hin, die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen zu bestimmen. Pierre de Fermat konnte schon 1640 eine solche Aufgabe für Polynome lösen, doch eine ansatzweise vollständige Theorie der Differentialrechnung wurde 1684 von Gottfried Wilhelm Leibniz und 1687 von Sir Isaac Newton eingeführt. Ihre mathematische Konstruktionen und Techniken waren unterschiedlich und (wie heute bekannt ist) ihre Resultate wurden unabhängig voneinander entwickelt, obgleich eine Kommission der Royal Society of London dies bestritt und 1712 in einer Plagiatsklage Newton die Priorität zuteilte.

Anmerkung 8.2. Es seien $x_0 \in A$ und $h > 0$ so, dass auch $x_0 + h \in A$. Die Gerade durch $(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0 + h)) \in \mathbb{R}^2$ enthält alle Punkte

$$\left(x, f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Falls f in x_0 differenzierbar ist, konvergiert also die Steigung dieser Gerade gegen $f'(x_0)$ für $h \to 0$, und im Grenzwert erhält man die Tangente in $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen von f: diese ist die Gerade, welche alle Punkte mit Koordinaten

$$(x, f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

enthält.

versch1 Beispiel 8.3. Es seien X normierter Raum und $\alpha \in X$. Die konstante Funktion $f : A \ni x \mapsto \alpha \in X$ ist in jedem Punkt differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in A$. Denn es gilt

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - 0 \right\| = \lim_{h\to 0} \frac{\|\alpha-\alpha\|}{h} = 0 \qquad \text{für alle } x \in X.$$

□

versch2 Beispiel 8.4. Die identische Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt differenzierbar und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, also ist $f'(x_0) = 1$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Anmerkung 8.5. Während die Theorie der Stetigkeit sich dafür eignet, auch für Funktionen mehreren Variablen erklärt zu werden, ist der Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion mehreren Variablen viel technischer und wird im der Vorlesung zur Analysis 2 eingeführt. Noch viel komplizierter ist die Theorie der Differenzierbarkeit für Funktionen einer komplexen Variablen: sie ist das Hauptthema der sog. Funktionentheorie, welche jenseits der Ziele dieser Vorlesung ist.

Eine wesentliche Charakterisierung der Differenzierbarkeit ist im Folgenden geschildert.

charakdiffab diffab Satz 8.6. *Es seien $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, X ein normierter Raum, $x_0 \in A$, $a \in \mathbb{R}$ und $f : A \to X$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(a) f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = a$;
(b) es gibt eine in x_0 stetige Funktion $\phi : A \to X$ so, dass

diffeq
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \phi(x_0+h)h \qquad \text{für alle } h \text{ mit } x_0+h \in A, \tag{8.3}$$

oder äquivalent so, dass

diffeq2
$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0) \qquad \text{für alle } x \in A, \tag{8.4}$$

Gelten (a) und (b), so ist $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis. Die Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn der Differenzenquotient in x_0 (vgl. (diffquotx0 8.1)) einen Grenzwert für $h \to 0$ hat, und somit ist die Funktion ϕ, welche durch

$$\phi(x_0+h) := \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & x \in A \setminus \{x_0\}, \\ f'(x_0) & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert wird, in x_0 stetig. □

Zwei unmittelbare, doch wesentliche Folgerungen vom Satz diffab 8.6 werden in den folgenden Sätze zusammengefasst.

stetdiff Satz 8.7. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in A$. Ist $f : A \to X$ in x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.*

Beweis. Die Darstellung (diffeq2 8.4) gilt. Nun sind beide (X- bzw. $\mathbb{R}$-wertige) Funktionen $x \mapsto \phi(x)$ als auch $x \mapsto x - x_0$ in x_0 stetig, und somit auch ihr Produkt $x \mapsto \phi(x)(x-x_0)$. Schließlich ist auch das Produkt $x \mapsto f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$ in x_0 stetig, da $f(x_0)$ eine Konstante ist. □

Anmerkung 8.8. Die Umkehrrichtung gilt nicht. Ein Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion ist durch $x \mapsto |x|$ gegeben.

Übungsaufgabe 8.9. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f an der Stelle 0 stetig aber nicht differenzierbar ist.

rrd

Satz 8.10 (Rechenregel für differenzierbare Funktionen). *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : A \to X$, welche in $x_0 \in A$ differenzierbar sind. Dann gelten die folgenden Rechenregel.*

(1) Die Funktion $(f+g)$ ist in x_0 differenzierbar und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
(2) Ist $\alpha \in \mathbb{K}$, so ist αf in x_0 differenzierbar und $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
Ist zusätzlich $X = \mathbb{K}$, so gelten auch die Folgenden.
(3) Die Funktion $(f \cdot g)$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
(4) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Die Produktregel (2) wurde von Leibniz selber gefunden. Die Regel (4) heißt *Kettenregel*.

Wir beweisen nur zwei dieser Regeln: Die anderen gelten als Übungsaufgabe. Was passiert in 2) im Spezialfall einer Funktion g, die konstant ist?

Beweis. 1) Es sei $x_0 \in A$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0). \end{aligned}$$

Dies vollendet den Beweis. □

versch3

Satz 8.11. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist an jeder Stelle differenzierbar mit* $\exp' = \exp$.

Beweis. Wir zeigen erst, dass exp in 0 differenzierbar ist. Ist $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ klein, so gilt $\exp(h) \leq 1 + h + h^2$ (warum?), d.h. $|\exp(h) - 1 - h| \leq h^2$, und somit

$$\left| \frac{\exp(h) - 1}{h} - 1 \right| = \left| \frac{\exp(h) - (1+h)}{h} \right| \leq |h|$$

und schließlich

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Die Exponentialfunktion ist sogar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar: wegen (6.4) gilt nämlich

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \exp(x_0) \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \exp(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x_0),$$

also ist $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Das Folgende ist als *Kettenregel* bekannt.

Satz 8.12. *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und X ein normierter Raum über $\mathbb{R}$. Es seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $j : B \to \mathbb{R}$ so, dass $f(A) \subset B$. Ist j in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, so ist die Funktion $j \circ f$ in x_0 differenzierbar und $(j \circ f)'(x_0) = j'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Beweis. Laut Satz 8.6 gibt es zwei in x_0 stetige Funktionen $\phi : A \to \mathbb{R}$ und $\psi : B \to X$, so dass

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0) \qquad \text{für alle } x \in A$$

und

$$j(y) - j(y_0) = \psi(y)(y - y_0) \qquad \text{für alle } y \in B$$

wobei $\phi(x_0) = f'(x_0)$ und $\psi(y_0) = j'(y_0) = j'(f(x_0))$. Also gilt

$$(j \circ f)(x) - (j \circ f)(x_0) = \psi(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \psi(f(x))\phi(x)(x - x_0) = (\psi \circ f)(x)\phi(x)(x - x_0)$$

für alle $x \in A$. D.h.,

$$(j \circ f)(x) - (j \circ f)(x_0) = \zeta(x)(x - x_0) \qquad \text{für alle } x \in A,$$

wobei $\zeta := (\psi \circ f) \cdot \phi : A \to X$. Nun ist ζ als Verkettung und Produkt von in x_0 stetigen Funktionen selber stetig (das Zeichen $\cdot$ soll als Produkt einer skalaren Zahl und eines Vektors verstanden werden: das Ergebnis ist also ein Vektor). In x_0 nimmt $(\psi \circ f) \cdot \phi$ den Wert $(\psi \circ f)(x_0)\phi(x_0) = j'(f(x_0))f'(x_0)$ an. Man kann wieder dank Satz 8.6 schließen, dass die Funktion $j \circ f$ in x_0 differenzierbar ist. $\square$

Übungsaufgabe 8.13. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein offenes Intervall ist, und $a \in I$. Zeige: Ist f an der Stelle $a \in I$ differenzierbar, so existiert

fah (8.5)
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Folgt aus der Existenz des Grenzwertes in (8.5), dass f an der Stelle a differenzierbar ist?

diffnotc1 Beispiel 8.14. Ist eine Funktion differenzierbar, so muss ihre Ableitung nicht überall stetig sein. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert ist. Dann ist f überall differenzierbar (an jeder Stelle $x \neq 0$ folgt das aus Produkt- und Kettenregel, an der Stelle 0 direkt aus der Definition von Differenzierbarkeit) mit

$$f'(x) := \begin{cases} -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Man überprüft aber direkt, dass f' an der Stelle 0 nicht stetig ist, da f' für x gegen 0 nicht gegen 0 konvergiert. Insbesondere ist f' selber, laut Satz 8.7, auch keine differenzierbare Funktion.

C1def Anmerkung 8.15. Es seien $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein normierter Raum. Ist $f : A \to X$ differenzierbar, so muss es stetig sein, aber nicht unbedingt ihre Ableitung f' – betrachte das Beispiel 8.14. Ist eine Funktion differenzierbar mit stetiger Ableitung, so spricht man von einer **stetig differenzierbaren Funktion**. Die Menge (und aufgrund der Rechenregeln, der *Raum*) der stetig differenzierbaren Funktion von A nach X bezeichnet man mit $C^1(A; X)$.

Ist A eine kompakte Menge, so ist für jedes $f \in C^1(A; X)$ auch f' beschränkt. Somit kann man die Abbildung $\|\cdot\|_{C^1} : C^1(A, X) \to \mathbb{R}$ betrachten, die durch

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

definiert ist (dabei ist $\|\cdot\|_\infty$ wie im Beispiel 4.10 definiert). Nun sieht man leicht, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm auf $C^1(A; X)$ definiert.

Beispiel 8.16. Es folgt unmittelbar aus der Definition der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\exp(ix) + \frac{d}{dx}\exp(-ix)\right) = \frac{1}{2}\left(i\exp(ix) - i\exp(-ix)\right) = -\sin(x)$$

und ähnlich

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dx}\exp(ix) - \frac{d}{dx}\exp(-ix)\right) = \frac{1}{2i}\left(i\exp(ix) + i\exp(-ix)\right) = \cos(x).$$

$\square$

Definition 8.17. *Es seien $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein normierter Raum. Eine Funktion $f : A \to X$ heißt* ***in*** *$x_0 \in A$* ***zweimal differenzierbar****, falls sie differenzierbar ist und der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f''(x_0)$ oder $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ bezeichnet: $f''(x_0)$ wird auch ***2. Ableitung von f an der Stelle*** *x_0 genannt. Genauso kann man rekursiv eine n****-Mal differenzierbare*** *Funktion definieren: die n-te Ableitung bezeichnet man mit $f^{(n)}(x_0)$ oder $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.*

Die Menge der Funktionen von A nach X, welche n-mal differenzierbar sind, und so dass $f^{(n)}$ auf ganz A stetig ist, wird mit $C^n(A;X)$ bezeichnet.

Ist eine Funktion sogar für alle $n \in \mathbb{N}$ in x_0 n-Mal differenzierbar, so heißt sie ***in*** *x_0* ***unendlich oft differenzierbar****. Die Menge der auf ganz A unendlich oft differenzierbarer Funktionen wird mit $C^\infty(A;X)$ bezeichnet.*

Anmerkung 8.18. Ähnlich wie in der Anmerkung 8.15 kann man sehen, dass $C^n(A;X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vektorraum ist, ja sogar ein normierter Raum bezüglich der Norm

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in A} \|f^{(k)}(x)\|_X .$$

(Dabei schreibt man konventionell $f^{(0)} := f$).

Übungsaufgabe 8.19. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige durch vollständige Induktion: Die Funktion $x \mapsto x^n$ ist unendlich oft differenzierbar und $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Gilt eine ähnliche Aussage für beliebige Polynome?

Übungsaufgabe 8.20. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ n-Mal differenzierbare Funktionen. Zeige durch vollständige Induktion: auch ihr Produkt $f \cdot g$ ist n-Mal differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}} .$$

Übungsaufgabe 8.21. Es sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit beschränkter Ableitung – d.h., $|f'(x)| \le M$ für alle $x \in (a.b)$. Zeige, dass f Lipschitzstetig ist. *(Hinweis: Wähle $L = \max_{t \in [a,b]} |f'(t)|$.)* Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$ Lipschitzstetig?

Übungsaufgabe 8.22. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. Zeige mittels der Definition sowie auch mittels der Rechenregeln, dass f differenzierbar ist und für alle x_0 gilt $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

Übungsaufgabe 8.23. Es sei $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeige, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log(1)}{\frac{x}{n}} = 1.$$

(2) Folgere, dass

$$\lim_{n \to \infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x.$$

(3) Zeige, dass

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Übungsaufgabe 8.24. Es sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(1) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $f'(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Zeige: Es gibt $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c\exp(\lambda x)$ für alle $x \in (a,b)$. *(Hinweis: Differenziere $h(x) := \exp(-\lambda x)f(x)$.)*
(2) Es sei $f(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ und definiere $g(x) = \log f(x)$. Zeige, dass g differenzierbar ist und berechne g'.
(3) Gib mit Hilfe von (2) einen zweiten Beweis von (1) unter der Voraussetzung, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.

`diffinv` Satz 8.25. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Es sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige injektive Funktion, so dass sie laut Satz* `stetinv` *7.69 eine (stetige) Umkehrfunktion $g : f(A) \to A$ hat. Es sei f in $x_0 \in A$ differenzierbar. Dann ist genau dann $f'(x_0) \neq 0$, wenn g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Ist g differenzierbar, dann folgt aus $g \circ f = id$ (wobei id die Identität bezeichnet), dass

$$1 = id'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \qquad \text{für alle } x \in A.$$

Somit ist notwendigerweise $f'(x) \neq 0$.

Es sei umgekehrt $f'(x) \neq 0$. Laut Satz `diffab` 8.6 ist die Funktion ϕ, welche durch

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \in A \setminus \{x_0\}, \\ f'(x_0) & x = x_0, \end{cases}$$

definiert wird, stetig. Sie erfüllt

`phidef` (8.6)
$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0), \qquad x \in A.$$

Zusätzlich gilt $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in A$: Denn für $x = x_0$ gilt $\phi(x) = f'(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung, während für $x \neq x_0$ gilt

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$$

auch, denn sonst wäre $f(x) = f(x_0)$, was die Injektivität von f widerspricht.

Setze $y := f(x)$ sowie $x := f^{-1}(y) = g(y)$ in (`phidef` 8.6) ein. Dann gilt

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\phi(g(y))}(y - y_0).$$

Da die Funktion $\frac{1}{\phi \circ g}$ in y_0 stetig ist, wieder nach Satz `diffab` 8.6 ist die Funktion g in y_0 differenzierbar und ihre Ableitung ist $\frac{1}{\phi(x_0)}$. □

Beispiel 8.26. Wir merken erst dass, da sin eine ungerade Funktion ist, gilt es

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(x) - i\sin(x)) = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1.$$

Betrachte nun $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, der Quotient zweier in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ differenzierbaren Funktionen. Laut Satz `diffinv` 8.25 ist nämlich

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

□

Übungsaufgabe 8.27. a) Bestimme die Tangente von $f(x) = \tan(x)$ and der Stelle $(\frac{\pi}{4}, 1)$.
b) Bestimme die Tangente von $f(x) = x\cos(x)$ and der Stelle $(\pi, -\pi)$.

Beispiel 8.28. Die Logarithmusfunktion log ist Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, welche bijektiv und stetig ist. Somit ist $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x},$$

wobei wir benutzt haben, dass $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Beispiel 8.29. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte die Abbildung $f : (0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\exp(\alpha \log(x))) = \exp(\alpha \log(x))\alpha\frac{1}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

□

Übungsaufgabe 8.30. Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

(1) $f(x) = 5^x$;
(2) $f(x) = x^x$;
(3) $f(x) = x^{(x^x)}$;
(4) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;
(5) $f(x) = \log(\log(1 + x))$;
(6) $f(x) = x^{\sin(x)}$;
(7) $f(x) = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{5}} + \sin^3(\frac{1}{x})}$;
(8) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin\log(x)}$.

maxdiff0 Satz 8.31. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in A$. Hat f in x_0 eine (lokale oder sogar globale) Maximum- oder Minimumstelle und ist sie dort differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur in dem Fall, dass x_0 eine Minimumstelle ist. Es sei $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap A$

$$f(x_0) - f(x) \leq 0.$$

Betrachte zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U_\varepsilon(x_0) \cap A$ mit $x_0 \leq x_n$ and $x_0 \geq y_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \leq 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und somit im Grenzwert erhält man also angesichts vom Satz 7.13

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \leq 0$$

Deshalb $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, d.h. $f'(x_0) = 0$. □

Eine Nullstelle von f' wird oft **kritischer Punkt** von f genannt. Wir haben in Satz 8.31 gesehen, dass eine auf einem offenem Intervall differenzierbare Funktion nur an einer Nullstelle lokale Maxima und Minima haben kann.

Anmerkung 8.32. Es stimmt jedoch nicht, dass f' nur an Maximum- oder Minimumstellen verschwindet. Z.B. gilt für $f : x \mapsto x^3$ wohl

$$f'(0) = 0,$$

obwohl die Funktion streng monoton wachsend und unbeschränkt ist.

Doch gilt die folgende.

maxdiff1 Satz 8.33. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Es sei f eine auf $[a, b]$ stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann wird jedes lokale Maximum und jedes lokale Minimum von f entweder an der Stelle a, oder an der Stelle b, oder an kritischen Punkten angenommen.*

Beweis. Dass f sicherlich mindestens ein lokales Maximum und ein lokales Minimum hat, folgt aus ihrer Stetigkeit (da $[a, b]$ kompakt ist). Sind die Maximum- bzw. Minimumstellen *nicht* a oder b, so folgt aus dem Satz 8.31, dass f' dort verschwinden muss. □

Der folgende Satz wurde 1691 von Michel Rolle bewiesen.

rolle

Satz 8.34. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche in jedem $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Ist f konstant, so gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. Ist jedoch f nicht konstant, so folgt aus dem Satz 7.87, dass f ein Maximum und ein Minimum hat, mindestens eines von diesen liegt notwendigerweise in (a, b). Bezeichne durch ξ diesen Punkt: dann ist $f'(\xi) = 0$ laut Satz 8.31. □

Übungsaufgabe 8.35. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig – und differenzierbar auf (a, b). Folgere aus dem Satz von Rolle: Verschwindet f' nirgendwo in (a, b), so ist f injektiv. Finde ein Gegenbeispiel für die Gültigkeit dieser Implikation für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen.

8.1. Folgerungen vom Satz von Rolle

Der Satz von Rolle ist zentral in der Differentialrechnung der reellen Funktionen einer Variable.

Der folgende Satz wurde von Augustin Louis Cauchy bewiesen.

emws

Satz 8.36. *Es seien die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) auch differenzierbar. Gilt für $x \in (a, b)$ stets $g'(x) \neq 0$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$, so dass*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. Betrachte eine Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, die durch

$$h(x) := \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x), \qquad x \in [a, b],$$

definiert wird. Man prüft direkt nach, dass $h(a) = h(b)$ und somit ist h eine stetige Funktion, welche in jedem $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist und mit $h(a) = h(b)$. Dann liefert der Satz von Rolle die Existenz eines $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Da aber

$$h'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi) \qquad \forall \xi \in (a, b),$$

ist die Aussage vollständig bewiesen. □

Das folgende fundamentale Resultat stammt aus Joseph Louis Lagrange und ist manchmal als **Mittelwertsatz** bekannt.

mws

Satz 8.37. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Es sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in allen $x \in (a, b)$ auch differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, so dass*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es sei g die identische Funktion. Dann kann man direkt den Satz von Cauchy anwenden. □

Übungsaufgabe 8.38. Wir haben somit den Satz von Cauchy anhand des Satzes von Rolle bewiesen, und den Satz von Lagrange anhand des Satzes von Cauchy. Zeige: Der Satz von Rolle kann wiederum direkt bewiesen werden, wenn man nur die Aussage des Satzes von Cauchy als gültig annimmt. (Die drei Sätze sind somit logisch äquivalent).

Einzig unter diesen drei Sätze, der Satz von Lagrange hat ein Gegenstück für vektorwertige Funktionen.

lagrvekt

Satz 8.39. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X ein normierter Vektorraum. Es sei die Funktion $f : [a, b] \to X$ stetig und in allen $x \in (a, b)$ auch differenzierbar. Dann gilt*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi \in (a,b)} \|f'(\xi)\|(b - a).$$

Beweis. Ist f' unbeschränkt, so gibt es nichts zu beweisen. Ist jedoch f' auf (a,b) beschränkt – sei etwa α eine obere Schranke von $\{\|f'(t)\| : t \in (a,b)\}$ – so kann man die Menge

$$S := \{\sigma \in [a+\varepsilon+b] : \|f(\sigma) - f(a+\varepsilon)\| \leq \alpha(\sigma - a - \varepsilon)\}$$

betrachten, wobei $\varepsilon \in (0, b-a)$ beliebig ist. Nun, $a+\varepsilon \in S$ und somit ist $S \neq \emptyset$, d.h., S hat ein Supremum. Aber, $S \subset [a,b]$ und somit ist S offensichtlich beschränkt. Darüber hinaus sieht man, dass dank der Übungsaufgabe 7.38 S abgeschlossen ist, da S das Urbild unter f der abgeschlossenen Kugel um $f(a+\varepsilon)$ mit Radius $\alpha(\sigma - a - \varepsilon)$, d.h.,

$$S = f^{-1}\left(B_{\alpha(\sigma-a-\varepsilon)}(f(a+\varepsilon))\right),$$

s. die Notation im Beispiel 7.24. Somit ist S kompakt und, nach der Übungsaufgabe 7.84, hat S ein maximum – etwa s. Wir wollen nun zeigen, dass $s = b$ ist: Dann folgt nämlich, dass

$$\|f(b) - f(a+\varepsilon)\| \leq \alpha(\sigma - a - \varepsilon)$$

für jede obere Schranke α von $\{\|f'(t)\| : t \in (a,b)\}$, und somit

$$\|f(b) - f(a+\varepsilon)\| \leq \sup_{t\in(a,b)} \|f'(t)\|(\sigma - a - \varepsilon) \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

was wiederum die Aussage impliziert (nimm einfach $\varepsilon \to 0$).

Wäre aber $s \neq b$, so gäbe es $t \in (s,b)$ und in der Tat

amannlagr

$$\|f(t) - f(a+\varepsilon)\| \leq \|f(t) - f(s)\| + \|f(s) - f(a+\varepsilon)\| \leq \|f(t) - f(s)\| + \alpha(s - a - \varepsilon) \qquad \text{für alle } t \in (s,b), \tag{8.7}$$

wo die erste Ungleichung aus der Dreiecksungleichung folgt und die zweite gilt, da $s \in S$. Die Differenzierbarkeit von f bedeutet wiederum, dass an der Stelle s

$$\lim_{t\to s} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{t-s} = \|f'(s)\|.$$

Da α das Supremum von $\|f'(\cdot)\|$ ist, gibt es δ klein genug (etwa $\delta \in (0, b-s)$) mit

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \alpha(t-s) \qquad \text{für alle } t \in (s, \delta - s)$$

Setzt man diese Ungleichung in (8.7) ein, so findet man

$$\|f(t) - f(a+\varepsilon)\| \leq \|f(t) - f(s)\| + \alpha(\sigma - a - \varepsilon) \leq \alpha(t-s) + \alpha(s-a-\varepsilon) = \alpha(t-a-\varepsilon).$$

Somit erfüllt t die Ungleichung, die S definiert – anders gesagt, $t \in S$. Dies widerspricht wiederum, dass $t > s := \max S$ – und vollendet den Beweis. □

Korollar 8.40. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X ein normierter Vektorraum. Es sei die Funktion $f : [a,b] \to X$ stetig und auch auf (a,b) differenzierbar. Genau dann gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a,b)$, wenn f konstant ist.*

Dieser Satz gilt natürlich insbesondere, wenn eine Funktion auf *jedem* Intervall die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, also auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Beweis. Es seien $x, y \in (a,b)$, o.B.d.A. $x < y$. Dann besagt der Satz 8.39, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{\xi\in(x,y)} \|f'(\xi)\|(y-x) = 0,$$

aufgrund unserer Voraussetzungen. Also ist f konstant.

Es sei umgekehrt f konstant. Dann folgt aus dem Beispiel 8.3, dass f überall differenzierbar ist und dass f' identisch verschwindet. □

Satz 8.41. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = f$ und $f(0) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f = c \cdot \exp$.*

Beweis. Betrachte nämlich die Hilfsfunktion g, die durch $g(x) := f(x)\exp(-x)$ definiert wird. Dann ist g differenzierbar und ihre Ableitung lautet $(f'(x) - f(x))\exp(-x) = 0$, somit ist laut Satz monotdiff 8.49.(5) g konstant. Da insbesondere $g(0) = f(0)\exp(0) = c$, folgt

$$c = g(x) = f(x)e^{-x} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist die Aussage bewiesen. □

Übungsaufgabe 8.42. Betrachte zwei Funktionen f, g, deren Ableitungen gleich sind. Betrachte nun die Differenz $f - g$ und zeige, dass f bis auf einer Konstante mit g überein stimmt.

hopi

Satz 8.43. *Es sei $A := (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Es seien die Funktionen $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$. Es sei für $a \in A$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) entweder $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
(ii) oder $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Dann gilt: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), so stimmt er mit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

überein.

Die obige **Regel von de L'Hôpital** wurde von Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital in seinem 1696 veröffentlichem Lehrbuch der Differentialrechnung bewiesen. Die Aussage ist auch gültig, wenn im Satz die Zahl a formal durch das Zeichen $+\infty$ oder $-\infty$ ersetzt wird.

Die obige Version ist in der Tat deutlich stärker als die herkömmliche L'Hôpitalsche Regel – diese setzt nämlich im Fall (ii) voraus, dass neben g auch f gegen $\pm\infty$ konvergeriert, für x gegen a. Um diese allgemeine Version zu beweisen, folgen wir dem Zugang in Ama [1, § IV.2].

Beweis. Man unterscheidet die drei Fälle

(1) $\alpha := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$
(2) $\alpha := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$
(3) $\alpha := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$

Wir werden zeigen, dass in den ersten zwei bzw. in den letzten zwei Fälle man

$$\liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \alpha \qquad \text{bzw.} \qquad \limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha$$

erhält, sowohl falls (i) gilt, als auch wenn (ii) der Fall ist.

Wir untersuchen nur den Fall (2) explizit, die anderen sind im wesentlich gleich. Es seien zwei Zahlen α_1, α_0 mit $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$. Dann gibt es ein $x_1 \in (a, b)$ so, dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < \alpha_1 \qquad \text{für alle } x \in (a, x_1).$$

Aus dem Satz von Cauchy folgt, dass für alle $x, y \in (a, x_1)$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}$$

für ein passendes $\xi \in (x,y)$ bzw. $\in (y,x)$. Da $y \in (\xi, x_1)$, gilt

hop0
$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} < \alpha_1 < \alpha_0 \qquad \text{für alle } x,y \in (a,x_1). \tag{8.8}$$

- Gilt (i), so kann man den Grenzwert der Ungleichung in (8.8) für x gegen a betrachten und erhalten, dass

hop1
$$\frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to a} \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \le \alpha_1 < \alpha_0 \qquad \text{für alle } y \in (a,x_1). \tag{8.9}$$

- Gilt stattdessen $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, so gibt es für alle $y \in (a,x_1)$ ein $x_2 \in (a,y)$ mit $g(x) > \max\{1, g(y)\}$ für alle $x \in (a,x_2)$. Somit folgt aus (8.8), dass

hop2
$$\frac{f(x)}{g(x)} < \alpha_1 - \alpha_1 \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad \text{für alle } x \in (a,x_2), \tag{8.10}$$

  und im Grenzwert für x gegen a erhält man

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \le \lim_{x\to a} \left(\alpha_1 - \alpha_1 \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right) = \alpha_1,$$

  angesichts der Bedingung (ii) und da y fest ist. Da nach Konstruktion $\alpha_0 < \alpha_1$, gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha_0,$$

  und somit gibt es $x_3 \in (a,x_2)$ mit

hop3
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha_0 \qquad \text{für alle } x \in (a,x_3). \tag{8.11}$$

Weil diese Ungleichungen (sowohl (8.9), falls (i) gilt, als auch (8.11), falls $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$) für α_0 beliebig nah an α gelten, sieht man schließlich, dass

hop4
$$\limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \le \alpha. \tag{8.12}$$

Ähnlich sieht man (in dem man $\alpha > \alpha_1 > \alpha_0$ statt $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$ betrachtet), dass auch

hop4b
$$\liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \ge \alpha. \tag{8.13}$$

Die beiden obigen Gleichungen liefern also die Aussage. Es bleibt nur noch den Fall

$$-\infty = \lim_{x\to a} g(x)$$

zu betrachten, d.h.,

$$+\infty = \lim_{x\to a} (-g)(x).$$

Man sieht aber, dass die Aussage aus den obigen Argumenten folgt, falls man sie für $-g$ wiederholt. Wie oben schon erwähnt werden die Fälle (1) und (3) völlig analog behandelt (Übungsaufgabe!) □

Beispiel 8.44. Es seien $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x\to a} \frac{n x^{n-1}}{m x^{m-1}} = \frac{m}{n} \lim_{x\to a} x^{n-1+1-m} = \frac{m}{n} a^{n-m}.$$

Beispiel 8.45. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1,$$

angesichts der Stetigkeit von cos.

Beispiel 8.46. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \sin x + 2x, \quad g(x) := \cos x + 2x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

definiert werden. Obwohl $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, sieht man, dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x + 2}{-\sin x + 2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $\frac{f'}{g'}$ periodisch (mit Periode 2π) und kann nach der Anmerkung periodnoconv 7.10 nicht konvergieren. Deshalb liefert der Satz hopi 8.43 kein Ergebnis. Doch ist $\frac{f}{g}$ für $x \to +\infty$ tatsächlich konvergent, da

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + 2x},$$

und somit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Übungsaufgabe 8.47. Bestimme die Grenzwerte

(1) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}$,
(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\exp(x)}{1/x}$,
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-27x+8{,}5}{2x^2+0{,}8x}$,
(4) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$,
(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-27x+7{,}1}{x^3-2x^2+5}$,
(6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$,
(7) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{4\log(x)}$.

Beispiel 8.48. Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von de l'Hôpital, dass $\lim_{y\to\infty} y^m e^{-y} = 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Es gilt nämlich $\lim_{y\to\infty} y^m = \infty$ und $\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$, also kann man den Satz von de l'Hôpital anwenden, und es gilt

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^m}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{m \cdot y^{m-1}}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot y^{m-2}}{e^y} = \ldots = \lim_{y\to\infty} \frac{m!}{e^y} = \frac{m!}{\lim_{y\to\infty} e^y} = 0.$$

Ähnlich gilt $\lim_{y\to\infty} y^{-m} e^y = \infty$. □

monotdiff

Satz 8.49. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und auch differenzierbar auf (a, b), so gelten folgende Aussagen:*

(1) Genau dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, wenn f in $[a, b]$ monoton wachsend ist.
(2) Genau dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, wenn f in $[a, b]$ monoton fallend ist.
(3) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ streng monoton wachsend.
(4) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ streng monoton fallend.
(5) Insbesondere: Genau dann ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. (1) Ist f monoton wachsend, so ist

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0 \qquad \text{für alle } x, y \in (a, b) \text{ mit } x \neq y.$$

Insbesondere gilt für $y \to x$

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in (a, b).$$

Ist umgekehrt $f'(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in (a,b)$, so liefert der Satz von Lagrange, dass für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0$$

für ein irgendein ξ: Somit ist f monoton wachsend.

(2) kann ähnlich bewiesen werden.

(3) Ist nun $f'(\xi) > 0$ für alle $\xi \in (a,b)$, so liefert der Satz von Lagrange, dass für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0$$

für ein irgendein ξ: Somit ist f streng monoton wachsend.

(4) hat einen entsprechenden Beweis.

(5) folgt direkt aus (1) und (2). □

Literaturverzeichnis

Ama [1] Herbert Amann, Joachim Escher, *Analysis I*, Birkhäuser, Basel, 2002.

cr [2] Richard Courand, Herbert Robbins, Ian Stewart, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1996.

fw [3] David Forster Wallace, *A Compact History of* ∞ *– Everything and more*, Norton, New York, 2003.

forst [4] Otto Forster, *Analysis 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2011.

heus [5] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis – Teil I*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009.

kk [6] Konrad Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, Berlin 2004.

schul [7] Friedmar Schulz, *Analysis I*, Oldenbourg, München, 2012.

Index

$C^1(A;X)$, 94
$C^\infty(A;X)$, 95
$C^n(A;X)$, 95
M^n, 12
$\operatorname{Im} z$, 56
$\operatorname{Re} z$, 56
$\Rightarrow$, 7
$\alpha^{\frac{1}{n}}$, 46
$\binom{n}{k}$, 17
$\emptyset$, 6
$\lfloor x \rfloor$, 27
$\mathbb{C}$, 56
$\mathbb{F}_2$, 27
$\mathbb{N}$, 9
$\mathbb{Q}$, 26
$\mathbb{R}$, 32
$\mathbb{Z}$, 26
$\mathbb{Z}_p$, 13
$\neg$, 7
$\overline{\mathbb{R}}$, 30
$\overline{z}$, 56
π, 73
$\sqrt[n]{x}$, 46
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, 61
a^x, 87
b-adischer Bruch, 57
id, 20
$\mathcal{P}(M)$, 11

Abbildung, 19
Ableitung, 91
  n-te, 95
Addition, 10
Algebraische Zahl, 60
Anordnung, 17
Aussagengleichheit, 8

Bernoullische Ungleichung, 16
Beschränkte Funktion, 38
Beschränkte Menge, 28
Betrag, 37
  einer komplexen Zahl, 56
Binomialkoeffizient, 17

Cauchy-Folge, 41
Cauchysches Konvergenzkriterium
  für Reihen, 62
Cosinus, 73
Cosinusfunktion, 73

De Morgansche Gesetze, 9
Dedekindsche Schnitteigenschaft, 29
Dezimalbruch, 57
Dirichletfunktion, 83

Eintrag, 11
Element, 5
Eulkidische Norm, 38
Exponentialfunktion, 72
  zu einer Basis, 87

Faktoren, 12
Fakultät, 17
Familie, 20
Fixpunkt, 87
Fixpunktsatz, 87
Folge, 40
  assoziierte Reihe, 61
  Cauchysche Konvergenzkriterium, 54
Funktion, 19
  bijektive, 19
  differenzierbare, 91
  Exponential-, 72
  identische, 20
  in einem Punkt stetig, 80
  injektive, 19
  invertierbare, 21
  konstante, 20
  konvergente, 75
  periodische, 76
  stetig, 80
  stetig differenzierbare, 94
  surjektive, 19
  Umkehr-, 21
  uneigentliche Konvergenz, 75

Ganze Zahlen, 26
Gaußsche Klammerfunktion, 27
Geordnetes Paar, 11

Graph, 12
Graph einer Funktion, 19
Grenzwert
  einer Folge, 40
  einer Funktion, 75
Gruppe, 25
  abelsche, 25
  Halbgruppe, 25
Gruppengesetz, 72

Häfungspunkt
  einer Folge, 51
Häufungspunkt
  einer Funktion, 76
Homomorphismus, 31

Identität, 20
Implikation, 7
Induktionsprinzip, 10
Infimum, 28
Intervall, 28
  abgeschlossenes, 28
  halboffenes, 28
  offenes, 28
Inverse Dreiecksungleichung, 39
Irrationale Zahlen, 32
Isomorphismus, 31

Körper, 26
  Geordneter Körper, 27
Kardinalität einer Menge, 22
Kartesisches Produkt, 12
Kette, 16
Kettenregel, 93
Komplexe Zahl, 56
  Argument, 73
  Betrag, 56
  Imaginärteil, 56
  konjugierte Zahl, 56
  polare Darstellung, 73
  Realteil, 56
  rein imaginär, 56
Konvergente Folge, 40
Koordinate, 11
Kugel
  abgeschlossene, 79
  offene, 79

Leibniz-Kriterium, 66
Lemma von Zorn, 16
Limes inferior, 52
Limes superior, 52
Logarithmus, 86

Maximales Element, 14
Maximum, 14, 28
Menge, 5
  überabzählbar, 39
  abzählbar, 39
  Bildmenge, 19
  Definitionsmenge, 19
  Differenzmenge, 6
    symmetrische, 6
  Durchschnittsmenge, 6
  kompakte, 89
  Komplementmenge, 6
  leere, 6
  Potenzmenge, 11
  Teilmenge, 6
    echte Teilmenge, 6
  unendliche, 23
  Vereinigungsmenge, 6
  Zielmenge, 19
Mengengleichheit, 5
Metrik, 39
Minimum, 28
Monoid, 25
Monotone Funktionen, 35
Multiplikation, 10

Natürliche Zahlen, 10
Negation, 7
Norm, 37
Nullfolge, 40

Obere Schranke, 14
Ordnung
  Halbordnung, 14
  lexikographische, 16
  Quasiordnung, 14
  Totalordnung, 14
  Wohlordnung, 14
Ordnungsvollständige Menge, 29

Polynom, 35
Positive Wurzel, 46
Potenz, 10
Produkt, 10
Projektion, 20
Punkt
  kritischer, 97

Quotientenkriterium, 65
Quotientenmenge, 13

Rationale Funktion, 35
Rationale Zahlen, 26
Raum
  Banachraum, 54
  metrischer, 39
  normierter, 37
Reelle Zahlen, 32
Regel von de L'Hôpital, 100
Reihe, 61
  alternierend, 66
  alternierende geometrische, 67
  Cauchysche Produktformel, 67
  divergente, 61

Exponentialreihe, 71
geometrische, 61
harmonische, 61
konvergente, 61
Marjorantenkriterium, 63
Partialsumme, 61
Potenzreihe, 69
Teleskopenreihe, 63
Umordnung, 66
unbedingt konvergent, 67
Relation, 12
Äquivalenzrelation, 13
antisymmetrische, 12
reflexive, 12
symmetrische, 12
totale, 12
transitive, 12
Repräsentant einer Äquivalenzklasse, 13
Ring, 26

Satz
Mittelwert-, 98
Sandwich-, 45
von Bolzano–Weierstrass, 53
von Cauchy, 98
von Lagrange, 98
von Rolle, 98
Signum, 38
Sinus, 73
Sinusfunktion, 73
Summe, 10
Supremum, 28

Tautologie, 8
Totalordnung auf $\mathbb{N}$, 15
Transzendente Zahl, 60
Tupel, 11

Umgebung, 38

Verkettung zweier Funktion, 21
Vertreter einer Äquivalenzklasse, 13

Wahrheitstabelle, 7
Wahrheitswerte, 7
Wurzel einer positiven Zahl, 46
Wurzelkriterium, 65

Zwischenwertsatz, 85