21. Juli 2012

# Klausur Analysis I

Die folgenden 8 Aufgaben sind in 2 Stunden (120 Minuten) zu lösen. **Aufgabe 8** ist dabei als **Zusatzaufgabe** in dem Sinne, dass man bei vollständiger Lösung aller Klausuraufgaben mehr als 100% der Gesamtpunkte erreichen kann, gedacht.
Ein selbstbeschriebenes Formelblatt im DIN-A4-Format ist als Hilfsmittel erlaubt. Bitte achten Sie darauf, (auch bei Rechenaufgaben) Sätze aus der Vorlesung (sinngemäß und nicht unbedingt im exakten Wortlaut) anzugeben, die Ihren Argumentationen (bzw. den Rechnungen) zugrunde liegen, und deren Voraussetzungen zu überprüfen.
Desweiteren sollte auf einen sauberen, übersichtlich gehaltenen Aufschrieb geachtet werden.
Viel Erfolg!

**1. Aufgabe** (3+7+5=15 Punkte)

(a) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$, definiert durch

$$a_n := \frac{(1+\frac{100}{n})^n}{2^n},\ n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\ ,$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Man zeige, dass die komplexe Folge ($i$ ist die imaginäre Einheit) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$c_n := \frac{i^{2n+1}n^2+1}{n^2+3n+2},\ n \in \mathbb{N} \quad ,$$

nicht konvergiert und bestimme die Menge ihrer Häufungspunkte.

(c) Man bestimme den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) .$$

**2. Aufgabe** (4+6=10 Punkte)

(a) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$$

auf Konvergenz.

(b) Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden reellen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-2n}\binom{2n}{n}x^n .$$

**3. Aufgabe** (4+7=11 Punkte)
Gegeben sei die durch die Rekursionsvorschrift

$$a_0 := 1,\ a_{n+1} := 2\sqrt{a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Man zeige, dass $0 < a_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Man beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

**4. Aufgabe** (9 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende, unbeschränkte Funktion. Man zeige, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) - f(-x) = 1 \ .$$

**5. Aufgabe** (4+5+7=16 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die definiert ist durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (\frac{4xy^2}{x^2+y^4}, 2x+3y) & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (0,0) & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \ .$$

Man beweise:

(a) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x_0, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ y \mapsto f(x_0, y)$, stetig.

(Tatsächlich gilt auch die analoge Aussage für den Fall, dass man die zweite Koordinate bei $y_0 \in \mathbb{R}$ festhält und die Funktion in der ersten Variable laufen lässt. Dieses ist hier aber nicht zu zeigen!)

(b) $f$ ist nicht stetig.

(c) Betrachte nun die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{f}(x) := f(x,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitungsfunktion (insbesondere also den Wert von $\tilde{f}'(0)$).

**6. Aufgabe** (2+6+3=11 Punkte)
Es sei $X$ ein normierter Raum und $M \subset X$. Der Rand $\partial M$ von $M$ wird definiert als die Menge aller Punkte $x \in X$, für die jede $\epsilon$-Umgebung $U_\epsilon(x)$ von $x$ sowohl einen Punkt aus $M$ als auch einen Punkt aus $M^c$ enthält:

$$\partial M := \{x \in X : \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \cap M \neq \emptyset \ \wedge \ U_\epsilon(x) \cap M^c \neq \emptyset\} \ .$$

Man beweise folgende Aussagen:

(a) $\partial M = \partial(M^c)$

(b) $M$ offen $\Leftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset$ .

(c) $M$ abgeschlossen $\Rightarrow \partial M \subset M$ (**Hinweis:** Man kann verwenden: $M$ abgeschlossen $\Leftrightarrow M^c$ offen.)

**7. Aufgabe** (2+4+4+4=14 Punkte)
Sei $M$ die Menge aller Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Auf $M$ werde durch

$$f \prec g :\Leftrightarrow \exists\ x_0 \in (0,1]\ \forall x \in [0, x_0] : f(x) \leq g(x)$$

für $f, g \in M$ eine Relation erklärt. Man überprüfe $\prec$ auf Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität und Totalität.

**Die folgende Aufgabe ist als Zusatzaufgabe im oben präzisierten Sinne gedacht.**

**8. Aufgabe** (5+7=12 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$f(0) = g(0) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq 0 \ .$$

(a) Man beweise, dass dann $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \geq 0$ folgt.

(b) Seien nun zusätzlich zu obigen Voraussetzungen die Ableitungsfunktionen $f', g'$ stetig und $f'(0) > g'(0)$. Dann gilt $f(x) > g(x)$ für alle $x > 0$.

**Hinweis zu (b):** Man zeige zunächst, dass eine $\epsilon-$Umgebung $U_\epsilon(0)$ von 0 existiert mit $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \geq 0$ mit $x \in U_\epsilon(0)$.