Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
22. Juni 2012

Analysis I
10. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 29. Juni 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (3+5+4=12 Punkte)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert aber nicht absolut konvergiert. Weiter sei $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der nichtnegativen Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der negativen Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze:

$$\alpha_k := a_{m_k},$$
$$\beta_k := -a_{n_k}.$$

(a) Man zeige zunächst die Gültigkeit von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty \quad \text{(Uneigentliche Konvergenz).}$$

(b) Man zeige, dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert, die gegen c konvergiert.

Hinweis: Zu gegebenem $c \in \mathbb{R}$ summiere man solange nur über die Glieder einer der beiden Teilfolgen $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, bis der Wert c über- bzw. unterschritten wird.

(c) Man zeige, dass ebenfalls Umordnungen der Reihe existieren, die uneigentlich gegen ∞ und $-\infty$ konvergieren.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Man zeige, dass dann eine reelle Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $e_n \in \{-1, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n a_n$$

konvergiert.

Hinweis: Man unterscheide die beiden Fälle $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ($\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut) und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$ ($\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut).

3. Aufgabe (2+4+4=10 Punkte)

(a) Man zeige durch Betrachtung der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wobei für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} =: b_n$$

sei, dass die (gewöhnliche) Konvergenz der Ausgangsreihen nicht die Konvergenz ihres Cauchyproduktes impliziert, so dass in Satz 6.33 auf die Bedingung, dass mindestens eine der beiden Ausgangsreihen sogar absolut konvergiert, nicht verzichtet werden kann. Man zeige also:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren.
(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ divergiert.

(b) Man beweise die Funktionalgleichung der (komplexen) Exponentialfunktion

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Cauchyschen Produktformel.

4. Aufgabe (3+3+3+3=12 Punkte)
Man bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\ x^{n-1}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+2}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{3n}$.