Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
29. Juni 2012

Analysis I
11. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 06. Juli 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe (4+4=8 Punkte)

(a) Man beweise die Additionsformeln

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise mit Hilfe der Definition der Exponentialreihe die Gültigkeit von

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0 \ .$$

Hierbei sind alle auftretenden Funktionen als Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu verstehen.

2. Aufgabe (3+3=6 Punkte)
Es sei $(X, ||.||)$ ein normierter Raum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Weiter seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ Abbildungen und $x_0 \in X, y_0, z_0 \in \mathbb{K}$, so dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \text{ und } \lim_{x\to x_0} g(x) = z_0 \ .$$

Man zeige:

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = y_0 z_0$

(b) Existiert eine $\epsilon-$Umgebung $U(x_0)$ von x_0, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U(x_0)$ und ist $z_0 \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_0}{z_0} \ .$$

3. Aufgabe ($5 \times 2 = 10$ Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $M_n(\mathbb{K})$ der Raum der $(n \times n)-$Matrizen über $\mathbb{K}$ versehen mit der ∞-Norm. Desweiteren werden, soweit keine Norm spezifiziert wird, alle weiter unten auftauchenden Räume mit der entsprechenden ∞-Norm versehen. Man zeige:

(a) $R_1 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ R_1(a,b) := \sum_{k=1}^n a_k b_k$ für $a, b \in \mathbb{K}^n$, ist stetig.

(b) Es sei $(X, ||.||)$ ein normierter Raum, $M \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und für alle $i \in \{1, 2, ..., M\}$ sei eine stetige Abbildung $f^i : X \to \mathbb{K}$ gegeben. Dann ist die Abbildung $F := (f^1, f^2, ..., f^M) : X \to \mathbb{K}^M$, definiert durch $F(x) := (f^1(x), f^2(x), ..., f^M(x))$ für alle $x \in X$, stetig.

(c) Die Addition von Matrizen $R_2 : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}),\ R_2(A,B) := A + B$ für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, ist stetig.

(d) Die Matrizenmultiplikation $R_3 : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}),\ R_3(A,B) := AB$ für $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, ist stetig.

(e) Polynomfunktionen auf $M_n(\mathbb{K})$ sind stetig, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $a_0, a_1, ..., a_m \in \mathbb{K}$ ist die Abbildung $P : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, definiert durch $P(A) := \sum_{k=0}^m a_k A^k$ für $A \in M_n(\mathbb{K})$, stetig.

4. Aufgabe (3+6=9 Punkte)

Man untersuche, ob folgende Limites existieren und bestimme diese gegebenenfalls:

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\frac{1}{x-1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ in Abhängigkeit von $n, m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ (wobei $x \in \mathbb{R}$).

Hinweis: Man denke im Fall „$\frac{0}{0}$" an die endliche geometrische Reihe.