Jun.-Prof. PD Dr. D. Mugnolo
F. Stoffers

Sommersemester 2012
06. Juni 2012

Analysis I
12. Übungsblatt

Abgabe: *Freitag, 13. Juli 2012, 9:00 Uhr in der Vorlesung*

1. Aufgabe $(6 \times 1,5 + 2 + 2 = 13$ Punkte)
Es sei X ein normierter Raum. Man zeige:

(a) (i) Es sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge offener Mengen. Dann ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n := \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} : x \in U_n\}$ offen.

(ii) Sind $U_1, ..., U_n \subset X$ endlich viele offene Mengen, so ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^n U_n := \{x \in X : x \in U_k$ für alle $k = 1, ..., n\}$ offen.

(iii) Man gebe ein Beispiel eines normierten Raumes X und einer Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ offener Mengen an, so dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ nicht offen ist.

(b) (i) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge abgeschlossener Mengen. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abgeschlossen.

(ii) Sind $A_1, ..., A_n \subset X$ endlich viele abgeschlossene Mengen, so ist $\bigcup_{k=1}^n A_n$ abgeschlossen.

(iii) Man gebe ein Beispiel eines normierten Raumes X und einer Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ abgeschlossener Mengen an, so dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nicht abgeschlossen ist.

(c) Man prüfe folgende Mengen auf Kompaktheit:

(i) $M_1 := \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^d$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

(ii) $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^d x_k \eta_k = c\} \subset \mathbb{R}^d$, wobei $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Zusatzaufgabe (3 Punkte): Man zeige, dass $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = E_n\} \subset M_n(\mathbb{R})$ kompakt ist, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix ist und auf dem Raum $M_n(\mathbb{R})$ die ∞-Norm zugrunde gelegt wird.

2. Aufgabe (8 Punkte)
Sei X ein normierter Raum, $x_0 \in X$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **oberhalbstetig** in x_0, falls für alle $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 existiert, so dass für alle $x \in U$

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

gilt. Ist f in allen $x_0 \in X$ oberhalbstetig, so heißt f oberhalbstetig.
f heißt **unterhalbstetig** in x_0, falls für alle $\epsilon > 0$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 existiert, so dass für alle $x \in U$

$$f(x) > f(x_0) - \epsilon$$

gilt. Ist f in allen $x_0 \in X$ unterhalbstetig, so heißt f unterhalbstetig.

Man beweise folgende Aussage:
Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Weiterhin sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine oberhalbstetige Abbildung. Dann besitzt f ein Maximum.

Bemerkung: Ein völlig analoges Resultat gilt für unterhalbstetige Abbildungen in Bezug auf die Existenz eines Minimums.

3. Aufgabe (1+2+2+3=8 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := |\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - x|$. Man zeichne den Graphen von f und zeige:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $f(x) = |x|$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x + n) = f(x)$.

(c) f ist stetig.

4. Aufgabe (7 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x + \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $\epsilon > 0$ gebe man ein $\delta(x_0, \epsilon) > 0$ an, so dass für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|x - x_0| < \delta(x_0, \epsilon)$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt. Lässt sich $\delta(x_0, \epsilon) > 0$ unabhängig vom Punkt x_0 wählen?